This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

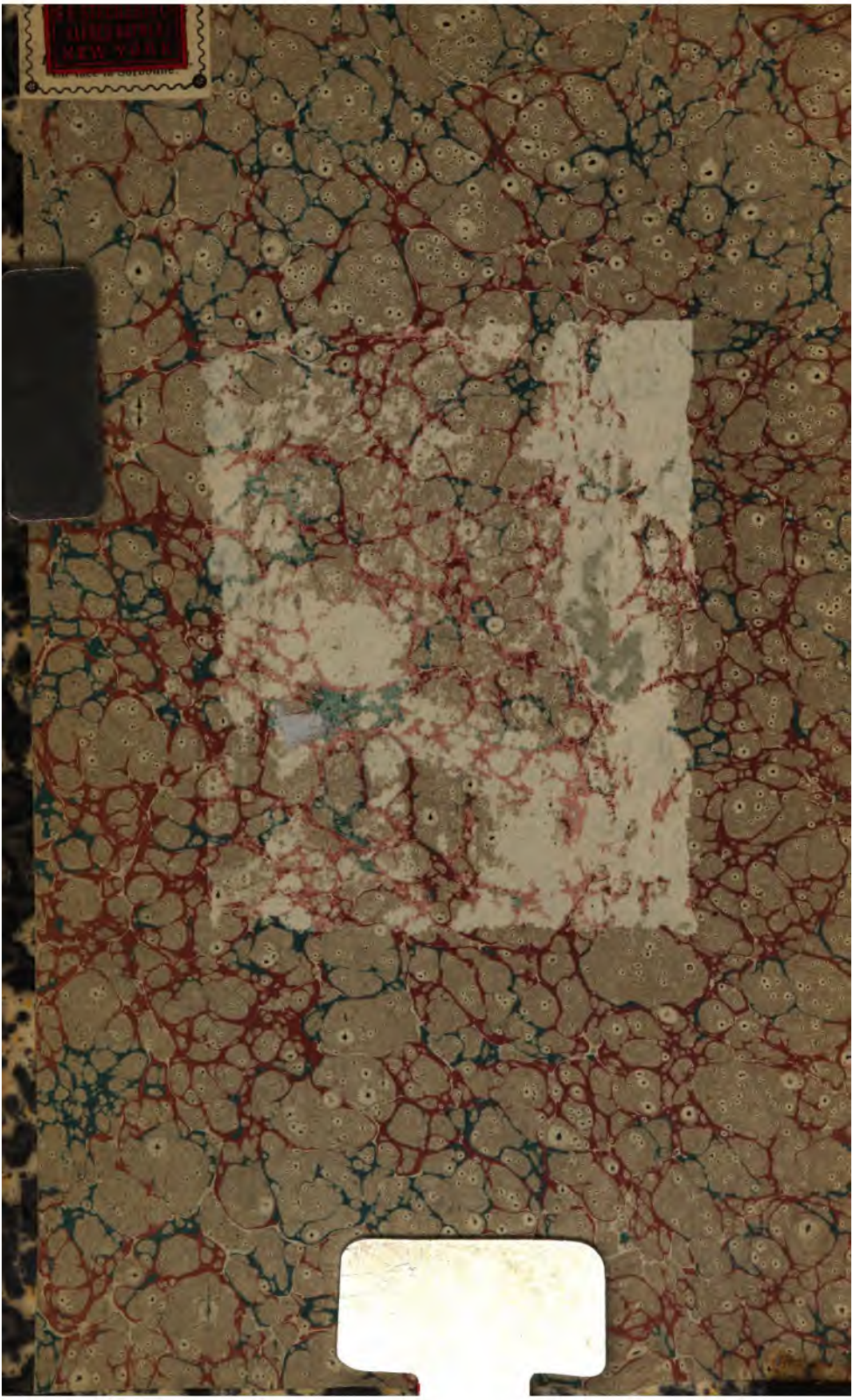
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

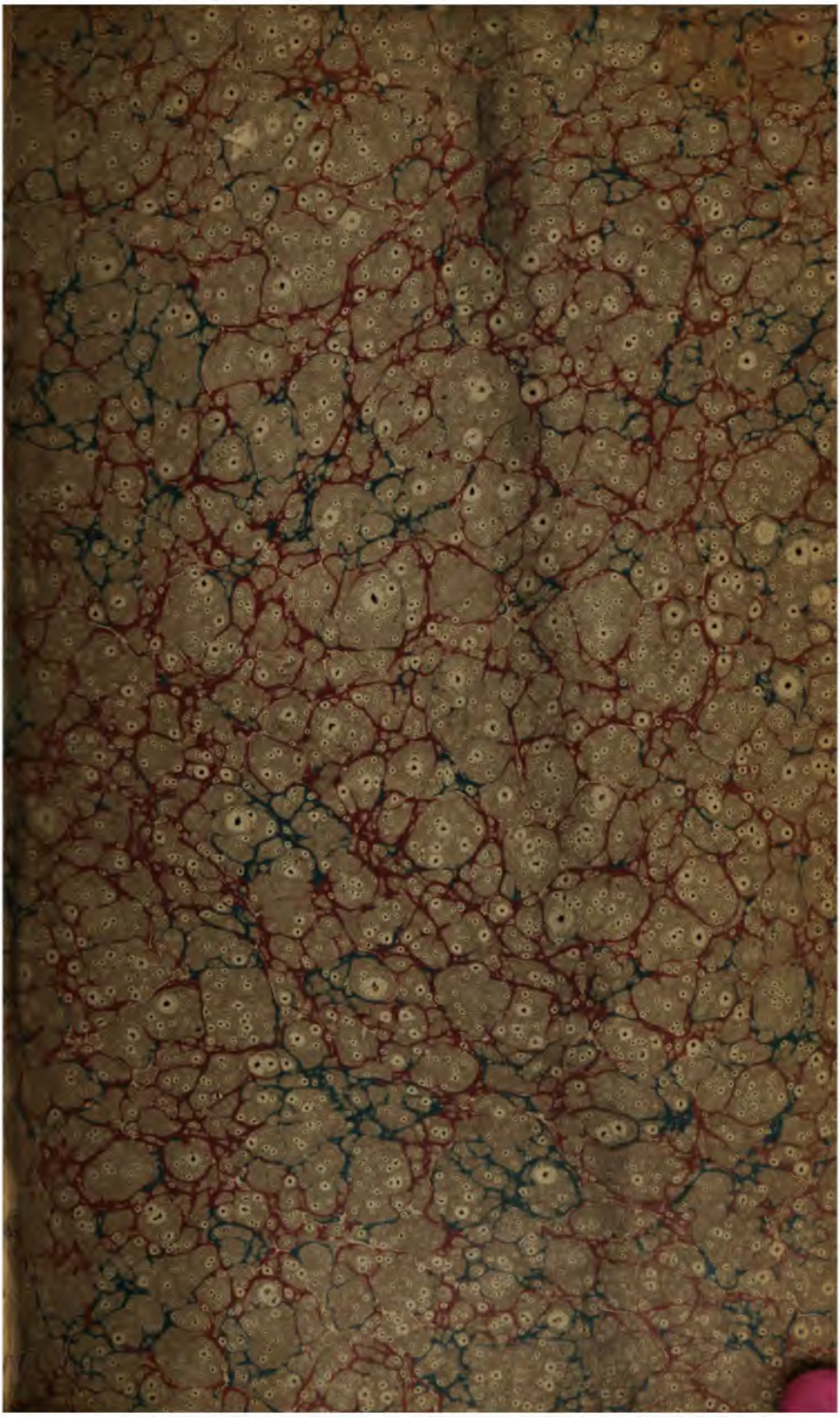
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`





Physics
-.50

SÉRIE DE TRAITÉS

SUR LA MÉCANIQUE

ET

SUR LES THÉORIES DE SES PRINCIPALES APPLICATIONS

A

L'ART DE L'INGÉNIEUR

I

CINÉMATIQUE.

TJ 175
B35

Paris. — Typographie Hennuyer et fils, rue du Boulevard, 7.

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE

PAR

J.-B. BELANGER,

Professeur à l'Ecole impériale centrale des Arts et Manufactures.
Ancien ingénieur en chef des Ponts et Chaussées et ancien professeur de Mécanique aux Ecoles impériales des Ponts et Chaussées et Polytechnique.

PARIS

DUNOD,
LIBRAIRE,
Quai des Augustins, 49.

GAUTHIER-VILLARS,
LIBRAIRE,
Quai des Augustins, 55.

EUGÈNE LACROIX, LIBRAIRE,
Quai Malaquais, 15.

1864

TABLE DES MATIÈRES,

SECTION I

NOTIONS GÉNÉRALES.

CHAP. I. **Du mouvement d'un point géométrique.**

Pages.

§ 1er. *De l'expression du mouvement d'un point*..... 1

1. Mouvement. — 2. Temps. Instant. — 3. Trajectoire. — 4. Equations du mouvement d'un point dans l'espace.— 5. Equation du mouvement d'un point suivant sa trajectoire. — 6. Le temps peut être négatif. — 7. Autres moyens d'exprimer le mouvement.

§ 2. *Du mouvement uniforme d'un point*..... 6

8. Définition du mouvement uniforme. — 9. Unités employées pour exprimer la vitesse. — 10. Equation générale du mouvement uniforme. — 11. Exemple du mouvement uniforme.

§ 3. *Du mouvement varié d'un point sur une ligne donnée*.. 12

12. Mouvement varié. Mouvement périodiquement uniforme. — 13. Vitesse. — 14. Mouvement uniformément varié. — 15. Remarques sur les équations et les propriétés du mouvement uniformément varié. — 16. Mouvement oscillatoire.

§ 4. *Détermination graphique de la vitesse*..... 19

17. Courbe représentative des espaces. — 18. Courbe représentative des vitesses.

§ 5. *De la vitesse d'un point dont le mouvement est exprimé en coordonnées parallèles à trois axes* 22

19. Projection de la vitesse sur un axe. — 20. Corollaire.— 21. Projection sur un plan, d'un point en mouvement dans l'espace.

Pages.

§ 6. *De la vitesse d'un point dont le mouvement est exprimé en coordonnées polaires*..... 25

22. Trajectoire plane. — **23.** Trajectoire quelconque dans l'espace.

§ 7. *Du mouvement d'un point relativement à un système de comparaison invariable en mouvement. Composition des vitesses et des chemins élémentaires*..... 30

24. Mouvement relatif. — **25.** Trajectoire relative. — **26.** Composition des mouvements. — **27.** Vitesse relative. — **28.** Composition de deux vitesses. — **29.** Cas particulier. — **30.** Exemples. — **31.** Composition d'un nombre quelconque de vitesses. — **32.** Remarque sur la simultanéité des vitesses composantes et de la vitesse résultante. — **33.** Projection du polygone des vitesses. — **34.** Décomposition des vitesses. — **35.** Composition des chemins élémentaires d'un point. — **36.** Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes.

CHAP. II. **Des divers mouvements d'un corps solide ou système invariable.**

§ 1er. *Généralités sur le mouvement d'un système invariable* 47

37. Relation des vitesses de deux points dont la distance est constante. — **38.** Cas particulier. — **39.** L'étude du mouvement d'un système invariable se réduit à celle du mouvement d'un triangle.

§ 2. *Classification des mouvements continus d'un système invariable. Relation des vitesses entre elles dans chaque cas*..... 48

40. Divers mouvements continus d'un système invariable.

Mouvement simple de translation..... 49

41. Translation rectiligne ou curviligne.

Mouvement simple de rotation autour d'un axe fixe..... 49

42. Rotation simple. Déplacement, vitesse, accélération angulaires.

Mouvement quelconque parallèle à un plan fixe..... 50

43. Roulement cylindrique. — **44.** Lorsqu'un système invariable se déplace parallèlement à un plan, on peut toujours l'amener d'une de ses positions successives à une autre quelconque d'entre elles, soit par une simple translation, soit par une simple rotation. — **45.** Lorsqu'un

Pages.

système invariable se transporte parallèlement à un plan, son mouvement élémentaire à un instant quelconque est une translation ou une rotation. — **46**. Centre instantané et axe instantané de rotation. — **47**. Tout mouvement d'un solide parallèlement à un plan est généralement un roulement cylindrique.

Rotation autour d'un point fixe..... 56

48. Roulement conique. — **49**. Lorsqu'un solide se meut autour d'un point fixe auquel il reste lié, on peut l'amener d'une à une autre de ses positions par une rotation effective autour d'un axe. — **50**. Tout mouvement élémentaire d'un solide dont un point est sans vitesse, est une rotation instantanée autour d'un axe.— **51**. Tout mouvement d'un solide autour d'un point fixe est un roulement conique.— **52**. Analogie du mouvement parallèle à un plan et du mouvement autour d'un axe.

Mouvement quelconque composé d'une translation et d'une rotation..... 59

53. Première image sensible du mouvement le plus général d'un solide.

Exemples de mouvement parallèle à un plan..... 60

54. Droite mobile sur deux courbes. — **55**. Droite mobile sur deux cercles. — **56**. Cas particulier où l'une des directrices est une ligne droite. — **57**. Epicycloïde et cycloïde. — **58**. Développante d'une courbe quelconque. — **59**. Conchoïde.

§ 3. *Composition des mouvements et généralement des vitesses d'un système invariable*..... 63

60. Composition des vitesses de translation. — **61**. Composition des vitesses de deux rotations autour d'axes concourants. — **62**. Composition d'un nombre quelconque de rotations concourantes.— **63**. Composition des vitesses de deux rotations dont les axes sont parallèles. — **64**. Cas de deux rotations parallèles, égales et de sens contraires. — **65**. Remarque sur l'instantanéité de l'axe de la rotation résultante de deux rotations. — **66**. Composition d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe de la rotation. — **67**. Composition ou réduction à deux mouvements simples, au point de vue des vitesses, d'un nombre quelconque de mouvements simples composants d'un système invariable. — **68**. Axe central du mouvement d'un corps invariable. — **69**. Autres propriétés de l'axe central du mouvement. — **70**. Seconde image sensible du mouvement continu d'un système invariable. — **71**. Au point de vue des vitesses, le mouvement quelconque d'un

Pages.

système invariable se décompose en trois translations parallèles à trois axes concourants et trois rotations autour de trois axes concourant au même point. — 72. Cas où les deux systèmes d'axes concourants sont rectangulaires et se confondent. — 73. Décomposition du chemin élémentaire décrit par un quelconque des points du système invariable en mouvement.

§ 4. *Mouvement relatif, glissement et roulement de deux corps solides* 81

74. Mouvement relatif de deux corps solides. — 75. Mouvement relatif de deux corps qui se touchent en un point. — 76. Mouvement relatif de deux corps qui se touchent en plusieurs points.

CHAP. III. **Des mouvements simultanés de plusieurs corps solides liés entre eux dans les machines.**

Ordre des matières de ce chapitre..... 87

77. Objet du chapitre. — 78. Des machines au point de vue de la cinématique. — 79. Divers modes de liaison des corps dans les machines.

§ 1er. *Liaison de deux corps solides en contact et assujettis à tourner autour de deux axes fixes parallèles. Généralités sur ce sujet*..... 89

80. Relation des vitesses de deux corps.— 81. Remarques.— 82. Cas particulier d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe. — 83. Cas particulier de deux translations.

Cas où le rapport des deux rotations est constant. Cylindres roulants. Engrenages..... 94

84. Cylindres roulants ou de friction. — 85. Engrenages cylindriques ou droits. Engrenage extérieur. Engrenage intérieur.— 86. Le profil d'une dent sur une roue est l'enveloppe des diverses positions qu'une dent de l'autre roue prend relativement à la première. — 87. Propriété fondamentale. — 88. Premier procédé général pour déterminer les profils de contact des engrenages. — 89. Deuxième procédé. Courbes épicycloïdales. — 90. Remarque.— 91. Glissement de deux dents d'engrenage. — 92. Profils de contact pratiques des engrenages : 1° Engrenages à lanterne ou à fuseaux cylindriques.— 93. 2° Engrenages à dents épicycloïdales.— 94. 3° Engrenages à développantes

Pages.

de cercles. — 95. Généralités sur les dents d'engrenage : nombre, pas, épaisseur, jeu, saillie, largeur. — 96. Détails spéciaux sur les engrenages épicycloïdaux. — 97. Détails spéciaux sur les engrenages à développantes de cercles.

Des engrenages intérieurs..... 121

98. Profils à flancs droits des engrenages intérieurs. — 99. Profil saillant épicycloïdal sur la roue intérieure. — 100. Profils mixtes sur les deux roues. — 101. Profils en développantes de cercles de deux roues dont l'une est intérieure.

Engrenages échelonnés, et engrenages épicycloïdaux..... 124

102. Engrenages en rangs échelonnés de Hooke. — 103. Engrenage héliçoïde, sans glissement, de Hooke et de White.

Crémaillère et roue dentée..... 127

104. Engrenage d'une crémaillère et d'une roue.

§ 2. *Liaison des deux corps solides en contact et assujettis à tourner autour de deux axes fixes concourants.*

Généralités sur ce sujet..... 128

105. Relations des vitesses des deux corps.

Cas où le rapport des rotations est constant. Cônes roulants. Engrenages coniques..... 129

106. Cônes roulants dits cônes de friction. — 107. Engrenages coniques.

§ 3. *Liaison de deux corps solides en contact et assujettis à tourner autour de deux axes non concourants*..... 132

108. Liaison d'une rotation et d'une translation. Vis et écrou. — 109. Rotation et translation oscillatoire.

Vis sans fin..... 135

110. Liaison de deux rotations dont les axes non concourants sont rectangulaires. — 111. Relations entre les diverses quantités à considérer dans une vis sans fin et sa roue. — 112. Cas de réciprocité de l'engrenage de la vis sans fin. — 113. Exécution mécanique de la roue d'une vis sans fin.

Engrenage hyperboloïde..... 144

114. Préliminaires sur ce sujet. — 115. Vitesses de l'un des deux corps tournants relativement à l'autre. — 116. Construction graphi-

Pages.

que des formules précédentes.— **117**. Mouvement continu de l'un des corps relativement à l'autre. Hyperboloïdes primitifs. — **118**. Equations des hyperboles méridiennes des hyperboloïdes primitifs. — **119**. Relation entre les coordonnées rectangulaires des hyperboles et la longueur de l'asymptote. — **120**. Contact des deux hyperboloïdes. — **121**. Cas particulier où les axes de rotation sont rectangulaires. — **122**. Engrenage hyperboloïde. — **123**. Forme et exécution des dents de cet engrenage.

§ 4. *Etude complémentaire sur la liaison de deux solides dont les rotations sont en rapport variable. Cas particulier d'une rotation et d'une translation variée.*

Liaison de deux rotations..... 161

124. Cylindres roulants non circulaires. — **125**. Détermination des courbes primitives. — **126**. Exemples. Spirales logarithmiques. Ellipses. Courbes déduites de l'ellipse. Quarré dont les angles sont arrondis. Secteurs circulaires. — **127**. Engrenages substitués aux courbes primitives. — **128**. Roues de Roemer. — **129**. Roue dentée excentrique et long pignon de Huigens. — **130**. Engrenage intermittent.

Bouton de manivelle, excentriques, cames, et tige guidée ou corps tournant..... 174

131. Manivelle ou excentrique circulaire et tige guidée à cadre. — **132**. Excentrique triangulaire et tige guidée. — **133**. Généralités sur les excentriques menant un cadre à bords parallèles. — **134**. Came et tige guidée. — **135**. Excentriques ou cames à ondes menant une tige guidée à roulettes. — **136**. Bouton, excentrique ou came en contact avec un autre corps tournant.

§ 5. *Liaison de deux corps solides tournants, par l'intermédiaire d'un troisième corps solide ou flexible.*

1° *Deux solides tournants liés par une bielle*..... 181

137. Propriété générale de cette liaison. — **138**. Balancier à bride. — **139**. Règles pratiques applicables aux balanciers des machines à vapeur. — **140**. Calcul des coordonnées de la courbe de Watt. — **141**. Propriété du pantographe applicable au numéro suivant. — **142**. Parallélogramme articulé de Watt.

2° *Deux solides tournants liés par un croisillon*..... 191

143. Joint brisé ou universel.— **144**. Relation des vitesses angulaires des arbres liés par le joint brisé. — **145**. Joint d'Oldham.

Pages.

3° *Deux corps tournants liés par un corps flexible...* 194

146. Propriété générale des poulies. — **147.** Poulies ordinaires. — **148.** Déplacements simultanés de deux poulies, dont l'une est excentrique.

4° *Deux corps tournants liés par un troisième en mouvement épicycloïdal*..... 197

149. Mouvement épicycloïdal plan. — **150.** Mouvement épicycloïdal sphérique.

SECTION II

APPLICATIONS AUX MACHINES.

CHAP. I. **Généralités sur les machines considérées comme appareils de communication et transformation de mouvement.**

§ 1er. *Classification des machines élémentaires*..... 201

151. Ancienne classification simplifiée.

§ 2. *Moyens d'assurer la direction du mouvement circulaire ou rectiligne de certaines pièces des machines*..... 204

152. Appuis des arbres tournants. — **153.** Assemblage fixe des roues sur leurs arbres. — **154.** Articulations à charnière. — **155.** Guides du mouvement rectiligne.

CHAP. II. **Mécanismes des transformations de mouvement.**

§ 1er. 1re *classe. Liaison de deux mouvements circulaires progressifs.*

1er *genre. Rapport des vitesses constant. Axes parallèles* 209

156. Contact immédiat. — 1 (*). Cylindres roulants. — 2. Engrenage extérieur. — 3. Engrenage intérieur. — 4. Engrenage héliçoïde.

(*) Les chiffres en caractères maigres indiquent les numéros d'ordre des tableaux synoptiques, planches IX, X, XI et XII.

Pages.

157. Poulie et courroie, corde ou chaîne, dans un même plan moyen.— 5. Courroie non croisée. — 6. Courroie croisée.

158. Communication de deux rotations par l'intermédiaire de bielles.— 7. Deux roues accouplées par deux bielles. — 8. Arbres coudés liés par trois bielles. — 9. Deux leviers oscillants égaux.

159. Communication par un croisillon. — 10. Joint d'Oldham.

160. Trains de roues dentées ou de poulies à axes parallèles.— 11. quatre roues dentées sur trois arbres. — 12. Quatre poulies sur trois arbres.

161. 13. Roue intermédiaire. — 14. Poulie intermédiaire.

162. Communication par mouvement épicycloïdal plan. — 15. Deux paires de roues.

163. Exemple : Horloge hebdomadaire et lunaire (l'une des roues est fixe).

164. Exemple de l'emploi de plusieurs mouvements épicycloïdaux.

165. 16. Communication par mouvement épicycloïdal sphérique.

166. Théorie générale des trains épicycloïdaux.

2e *genre. Rapport des vitesses constant. Axes concourants*..... 230

167. Contact immédiat. — 17. Cônes roulants. — 18. Engrenages coniques.

3e *genre. Rapport des vitesses constant. Axes non situés dans un même plan*..... 230

168. Axes rectangulaires, contact immédiat. — 19. Vis sans fin.

169. Angles sous un angle quelconque, contact immédiat. — 20. Engrenage hyperboloïde.

170. Axe intermédiaire concourant avec les deux autres. — 21. Quatre roues coniques. — **171**. Axe intermédiaire concourant avec l'un des axes extrêmes et parallèle à l'autre. — 22. Deux roues dentées coniques et deux roues cylindriques.— **172**. Deux axes intermédiaires.—23. Poulies de renvoi. — **173**. Courroie oblique. — 24. Une seule courroie sans fin sur deux poulies non parallèles.

4e *genre. Rapport des vitesses variable. Axes parallèles* 233

174. Contact de deux cames.—25. Spirale logarithmique.—**175**. Engrenages divers. — 26. Engrenage elliptique. — 27. Engrenage dérivé de l'ellipse. — 28. Quarrés arrondis. — 29. Engrenage de trois roues dentées ordinaires, dont l'une est excentrée. — 30. Cônes inverses de Rœmer. — 31. Secteurs dentés engrenant alternativement. — 32. Engrenage intermittent.

Pages.

176. Manivelles.—33. Deux manivelles à bouton et coulisse.—34. Deux manivelles égales unies par une bielle.

177. Communication par un corps flexible. — 35. Fusées. — 36. Deux poulies, l'une excentrique. — 37. Pédale du tourneur.

5e *genre. Rapport des vitesses variable. Axes non parallèles* 238

178. Communication par croisillon. — 38. Joint de Cardan. — **179.** Communication immédiate par engrenage. — 39. Roue dentée excentrée et long pignon (de Huigens). — 40. Vis sans fin à inclinaison variable. — 41. Engrenage d'angle intermittent. — **180.** Communication par bielle. — 42. Deux balanciers oscillant simultanément. — 43. Renvois de sonnettes.

§ 2. 2e *classe. Liaison de deux mouvements, l'un circulaire, l'autre rectiligne ou héliçoïde, avec changements de sens simultanés.*

1er *genre. Translation parallèle au plan de la rotation.* 239

181. Communication immédiate. — 44. Rouleau menant une tige. — 45. Roue dentée et crémaillère.—46. Balancier à coulisse et tige guidée à bouton. — 47. Balancier à bouton et tige guidée à coulisse. — **182.** Communication par l'intermédiaire d'un corps flexible. — 48. Treuil. — 49. Treuil double à gorges. — 50. Treuil conique. — 51. Bobine. — 52. Treuil différentiel. — 53 et 54. Tambour ou secteur lié à une tige tangente ou à deux tiges tangentes par des chaînes ou des lanières. — 55. Tambour et secteur, et corde passant sur deux poulies de renvoi. — 56. Archet et foret. — **183.** Communication par l'intermédiaire d'un corps solide. — 57. Balancier, bielle et tige guidée. — 58. Balancier à support oscillant et tige guidée. — 59. Balancier à bride. — 60. Parallélogramme articulé de Watt. — 61. Zigzag.

2e *genre. Translation parallèle à l'axe de la rotation.* 245

184. Communication immédiate. — 62. Cylindre à rainure et bouton glissant. — 63. Vis sans fin et crémaillère. — 64. Vis tournant simplement et écrou guidé en translation — 65. Tracé mécanique d'une hélice. — 66. Foret à vis. — 67. Ecrou tournant simplement et vis en translation. — 68. Deux vis inverses.—69. Vis tournant dans un écrou fixe. — **185.** Communication par engrenages intermédiaires.—70. Vis différentielle. — 71. Machine à aléser.

Pages.

§ 3. *3e classe. Liaison de deux mouvements rectilignes*..... 249

186. Communication immédiate. — 72. Plan incliné, tige guidée ou deux tiges guidées, l'une à coulisse, l'autre à bouton. — **187.** Communication par l'intermédiaire d'un corps solide. — 73. Deux tiges guidées, unies par une bielle. — **188.** Communication par corde et poulies simples. — 74. Poulie fixe. Deux poulies fixes. — 75. Poulie mobile et poulie fixe de renvoi. — **189.** Communication par une corde et un palan. — 76. Palan dont les deux moufles ont le même nombre *n* de poulies. — 77. Palan dont une moufle a une poulie de plus que l'autre. — **190.** Palans conjugués. — 78. Palans liant deux vitesses dont le rapport est le produit de deux nombres entiers. — 79. Palans liant deux vitesses dont le rapport est fractionnaire.

191. Communication par des chaînes. — 80. Balancier à deux secteurs et deux tiges. — **192.** Communication par un liquide. — 81. Deux pistons et un tuyau de communication.

§ 4. *4e classe. Liaison de deux mouvements circulaires, l'un progressif, l'autre alternatif.*

1er genre. Axes parallèles..... 253

193. Communication immédiate. — 82. Balancier appuyé sur un excentrique à révolution entière. — 83. Balancier à bouton qui circule dans une rainure à révolution entière. — 84. Manivelle à révolution entière, dont le bouton se meut dans une coulisse oscillante. — 85. Martinet. Marteau frontal. — **194.** Communication par bielle ou par encliquetage. — 86. Manivelle, bielle et pédale. — 87. Manivelle, bielle et balancier. — 88. Excentrique circulaire et balancier. — 89. Manivelle, bielle et balancier intermittent avec choc. — 90. Manivelle et balancier à quadruple oscillation par tour. — 91. Manivelle et balancier, et intermittent sans choc. — 92. Levier de Lagarousse. — 93. Levier à encliquetage intermittent. — 94. Encliquetage Dobo. — 95. Balancier à double crémaillère guidée. — **195.** Communication par engrenage — 96. Bielle à roue dentée circulante dite *roue planétaire de Watt.* — 97. Roue partiellement dentée et pignon alternativement extérieur et intérieur.

2e genre. Axes non parallèles..... 261

196. Communication immédiate. — 98. Marteau à soulèvement latéral. — 99. Balancier appuyé sur un excentrique conique. — 100. Balancier appuyé sur un filet de vis d'inclinaison variable. — **197.** Communication par bielle. — 101. Manivelle, balancier et bielle à joint brisé.

Pages.

§ 5. 5e *classe. Liaison de deux mouvements, l'un circulaire progressif, l'autre rectiligne alternatif.*

1er *genre. Translation parallèle au plan de la rotation.* 262

198. Communication immédiate par excentrique. — 102. Manivelle et tige guidée à coulisse. — 103. Excentrique circulaire et tige guidée à cadre. — 104. Excentrique non circulaire et tige à cadre. — 105. Excentrique et tige à deux roulettes. — 106. coulisse excentrique et tige à bouton. — 107. Excentrique et tige à roulette et à ressort.

199. Communication immédiate par engrenage ou came. — 108. Pignon partiellement denté et cadre guidé à deux crémaillères. — 109. Pilon et arbre à cames. — 110. Arbre à cames et cadre à mentonnets intérieurs. — 111. Pignon et cadre à denture intérieure continue.

200. Communication par bielle ou par une corde. — 112 et 113. Manivelle ou excentrique circulaire, bielle et tige guidée. — 114. Manivelle, double bielle et joug guidé, lié à une tige. — 115. Deux roues dentées égales, deux bielles égales et un joug menant une tige. — 116. Manivelle tournant uniformément et balancier à coulisse et à bielle, dont les courses sont de durées inégales. — 117. Manivelle et poulie de renvoi.

201. Communication par engrenage intermédiaire. — 118. Roue à mouvement épicycloïdal de Lahire.

2e *genre. Translation parallèle à l'axe de la rotation.*

202. Communication immédiate. — 119. Plateau incliné tournant sur un pivot, et tige à galet. — 120. Roue à ondes et tige à galet. — 121. Rainure continue dans un cylindre tournant et cheville glissante.

CHAP. III. Organes servant à établir, interrompre ou modifier les liaisons du mouvement dans les machines.

§ 1er. *Moyens d'établir ou de faire cesser à volonté une liaison de mouvement.* 269

203. Embrayage par manchon mobile de deux arbres en prolongement l'un de l'autre. — 122. Embrayage à dents héliçoïdes. — 123. Embrayage à cônes concentriques de friction. — 124. Désembrayage brusque. — 125. Embrayage à vis.

204. Embrayage de deux arbres à roues dentées. — 126. Par manchon glissant. — 127. Par le glissement en long d'un des deux arbres.

205. Embrayage par rouleaux ou cônes de friction. — 128. Embrayage

Pages.

de deux arbres parallèles. — 129. Embrayage par rouleau de pression d'un arbre tournant et d'une tige guidée. — **206**. Embrayage des courroies sans fin. — 130. Par poulie folle. — 131. Par un tendeur. — 132. Par déplacement d'un palier. — **207**. Embrayage par déclics. — 133. Déclic appliqué à une poulie. — 134. Déclic appliqué à un mouton.

§ 2. *Moyens de modifier une liaison de mouvement*..... 275

208. Changement de vitesse angulaire par roues dentées et manchons d'embrayage. — 135. Axes parallèles. — 136, Axes concourants. — 137. Cas particulier du mécanisme précédent.

209. Changement de vitesse angulaire par le déplacement d'une courroie sans fin sur diverses poulies égales. — 138. Axes parallèles. — 139. Axes concourants. — **210**. Changement de vitesse angulaire par tambours de rayons variables ou par poulies étagées. — 140. Courroie sans fin sur deux tambours. — 141. Deux tambours dont l'un est cylindrique. — 142. Poulies étagées.

211. Rapport variable des vitesses angulaires d'un cône et d'un plateau circulaire et d'une roulette. — 143. Cône et roulette. — 144. Plateau tournant et roulette. — **212** Changement de vitesse par vis sans fin. — 145. Mouvement héliçoïdal dont la translation change à volonté de sens.

Note sur les épicycloïdes planes..... 285

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA

—

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
47	20	AA′ et BB′	AB et A′B′
74	20	avec	à
»	22	relatif	(effacer ce mot)
82	19	OA′	O′A′
93	22	$AA_1 \dots A_1M_1$	$MM'_1 \dots M'_1M_1$
98	8	calculer,	, calculer
»	15	A_1a_1	$A'_1a'_1$
103	23	AP′M′	APM′
114	17	$a_1\alpha \dots a'_1\alpha'$	$A_1\alpha \dots A'_1\alpha'$
»	21	$-\alpha_1A_1$	$-\alpha_1A_2$
»	24	$\alpha_1\alpha = \dots -\alpha_1A_{p'}$	$A_1\alpha = \dots -\alpha_1A_2$
120	13	C′I	C′T
»	14	B′e′	E′e′
148	17	AB	A′B′
156	3	M′M$_1$	M′M′$_1$
»	dernière	$M_1M'_1$	M_1L'
157	2	$M_1M'_1 = \dots \frac{z \sin \beta}{\cos \alpha}$	$M_1L' = \dots \frac{z \sin \beta'}{\cos \alpha}$
»	3	$\frac{z \sin \beta}{\cos}$	$\frac{z \sin \beta'}{\cos \alpha}$
169	16	angle ACB	angle égal à ACB
176	27	premiers	premier
179	21	AM	Ad
»	22	De	de
180	5	vertical	horizontal
»	dernière	(mots omis)	est uniforme et progressive
190	8	m′MO	m′M′O

Dans la figure 67, manque une ligne AV perpendiculaire à AB du côté droit.

AVANT-PROPOS

La Mécanique, dont le nom vient du grec μηχανή, machine, n'est pas seulement la science des machines; elle a plus généralement pour objet les lois du mouvement des corps et les relations du mouvement avec les forces qui le produisent; elle comprend, en particulier, la connaissance des conditions de l'équilibre des corps, c'est-à-dire de leur repos en présence de plusieurs causes de mouvement qui se combattent.

Suivant une remarque due à Ampère (*Essai sur la philosophie des sciences*, 1835), il est logique et utile de commencer l'enseignement de la mécanique par celui des propriétés des mouvements des corps étudiés indépendamment de la mesure des forces qui les produisent; et, comme il l'a dit lui-même : « C'est à la science où ces mouvements sont considérés en eux-mêmes, tels que nous les observons dans les corps qui nous environnent, et spécialement dans les appareils appelés machines, qu'il a donné le nom de *cinématique*, de κίνημα, mouvement. »

Tel est le sujet du Traité que je publie, et qui est, pour ainsi dire, une sixième édition revue et augmentée de la

première partie des feuilles autographiées, rédigées pour l'usage exclusif des auditeurs du cours de mécanique et machines que j'ai professé depuis l'année 1851 jusqu'en 1860, à l'Ecole polytechnique.

L'ouvrage est divisé en deux sections.

La première, ayant pour titre *Notions générales*, est purement théorique. Suivant les vues d'Ampère, après les considérations fondamentales sur les notions de mouvement et de vitesse, soit absolus, soit relatifs, on s'y occupe des rapports qui existent entre les vitesses des divers points d'un système géométrique défini, et d'abord d'un corps solide. On expose à ce propos la théorie de la composition des mouvements, qui sera d'une grande utilité dans l'étude de la mécanique des forces ou la dynamique. On passe ensuite au cas de plusieurs corps liés entre eux et à des appuis fixes, comme le sont les diverses parties d'une machine. On est ainsi conduit à étudier notamment les questions relatives aux formes des dents d'engrenages, des cames ou excentriques, au mode de liaison des balanciers ou manivelles par des bielles, aux rapports des vitesses angulaires dans les systèmes à mouvements épicycloïdaux.

La seconde section, sous le titre *Applications aux machines*, passe rapidement en revue la plupart des mécanismes connus pour réaliser ce qu'on appelle communément les transformations de mouvement, les embrayages, les modifications de mouvement. Ces divers appareils sont rangés dans l'ordre relatif au genre de service qu'ils rendent, au but qu'ils doivent atteindre, et non relatif aux moyens

qu'ils mettent en usage. Leur explication est brève et presque uniquement descriptive, parce que toute la théorie qu'ils exigent est contenue dans la première section, à laquelle le lecteur est engagé, par des numéros de renvoi, à recourir au besoin. Leur classification est rendue plus saisissable, et la recherche de la solution d'un problème de transformation est facilitée par une suite de tableaux synoptiques où les divers mécanismes mentionnés dans la deuxième section sont figurés par de simples croquis sur une petite échelle.

Quelque nombreux que soient ces mécanismes élémentaires, ils sont loin d'offrir une liste complète de toutes les combinaisons qui sont employées dans l'industrie, surtout en ce qui regarde les mouvements variés et intermittents. Des détails plus multipliés sur ce sujet me paraîtraient appartenir à la technologie mécanique, et risqueraient de n'avoir plus les caractères de simplicité, de clarté et d'utilité générale auquel j'aspire pour cet ouvrage.

J'ai à peine besoin d'ajouter que la science de la cinématique ne peut suffire ni à la bonne conception d'un projet de machine, ni à la détermination complète des parties d'une machine bien conçue quant à ses dispositions principales. Même abstraction faite de l'énergie du moteur nécessaire, l'étude des effets du frottement des corps en contact, de la roideur des corps flexibles, de l'élasticité des solides, de leur résistance à la rupture ou aux déformations permanentes est toujours d'une grande utilité, et en certains cas indispensable. C'est l'union des diverses branches de la mécanique théorique aux connaissances pratiques acquises

par la fréquentation des ateliers, qui peut seule former un ingénieur constructeur de machines.

Plusieurs ouvrages publiés avant le mien m'ont été fort utiles, et je me plais à les citer ici dans l'ordre chronologique de leur publication.

1808. — *Programme d'un cours élémentaire des machines, à l'Ecole polytechnique*, par M. Hachette, et *Essai sur la composition des machines*, par MM. Lanz et Bétancourt. Cet ouvrage m'a fourni l'idée de mes tableaux synoptiques.

... Et 1845 (2e édit. imprimée à Liége). *Traité de mécanique industrielle*, par M. le général Poncelet, alors colonel du génie, membre de l'Institut, etc. La troisième partie, intitulée *Des machines et des moteurs*, traite, entre autres sujets, des communicateurs et modificateurs instantanés du mouvement et des engrenages. L'auteur, qui partage avec Navier l'insigne honneur d'avoir créé dans nos écoles d'application, celle de l'artillerie et du génie à Metz, et celle des ponts et chaussées à Paris, l'enseignement de la mécanique appliquée aux machines et aux constructions, a reproduit les bases essentielles de cet enseignement dans le cours de physique mécanique qu'il a fondé à la Faculté des sciences de Paris. On doit regretter qu'il n'ait pas, jusqu'à présent, livré le texte de ses leçons à la publicité.

1841. — *Principes de mécanisme* (Principles of mechanism), par M. R. Willis, Londres. Cet ouvrage jouit d'une haute réputation méritée, malgré quelques erreurs, par d'intéressantes recherches mathématiques, mais surtout par de nombreux détails descriptifs qui attestent une vaste éru-

dition et une grande connaissance des procédés de l'industrie moderne.

1849 et 1861 (2e édit.) *Traité de cinématique,* par M. C. Laboulaye. Cet ouvrage, dont le plan était conçu avant que l'auteur connût celui de M. Willis, contient, avec des emprunts nombreux et presque textuels faits à ce dernier, comme M. Laboulaye le déclare lui-même, des additions considérables, notamment sur l'horlogerie et les machines outils. L'auteur a cru devoir introduire dans son livre des notions de dynamique sur les forces, leur mesure, leur travail et leur équilibre dans les machines, sur les frottements, sur les moteurs animés et autres. Cette réunion serait assurément nécessaire, si un traité de cinématique devait être l'unique « guide du mécanicien pour obtenir un mouvement voulu. » Mais avec Ampère et Willis, il est bien permis de penser autrement et de considérer la cinématique comme ayant des théories propres, indépendantes de la dynamique et de la connaissance des propriétés physiques et expérimentales des corps. Du reste, il n'y aura pas nécessité, ni même utilité, que les jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur étudient et possèdent à fond toute la cinématique avant de s'occuper des autres parties de la mécanique. A l'Ecole centrale, ces deux genres d'études sont suivis presque simultanément sous des professeurs différents, de même que dans l'enseignement universitaire on entremêle sagement les études de l'algèbre et de la géométrie, sans prétendre que ces deux parties des mathématiques se confondent ou soient inséparables.

1850. — *Leçons de mécanique pratique. Cinématique*, par M. le général Morin, alors colonel d'artillerie, membre de l'Institut, etc. Cet ouvrage, destiné aux auditeurs des cours du Conservatoire des arts et métiers, exige chez les lecteurs moins de connaissances mathématiques que n'en suppose le présent traité. Il contient d'ailleurs la description des diverses machines utilement employées dans l'industrie, mais dont j'ai cru devoir laisser l'étude à un autre enseignement, tel que le cours d'établissement et de construction des machines, qui est spécialement professé à l'Ecole centrale, par M. Ch. Callon, dont les leçons alternent avec celles du cours de mécanique appliquée qui m'est confié.

CINÉMATIQUE.

PREMIÈRE SECTION

NOTIONS GÉNÉRALES.

CHAPITRE I.

DU MOUVEMENT D'UN POINT GÉOMÉTRIQUE.

§ 1.

DE L'EXPRESSION DU MOUVEMENT D'UN POINT.

1. Mouvement. — Le mouvement d'un corps consiste en ce que ce corps ou ses parties occupent successivement différents lieux dans l'espace. Nous étudierons d'abord le mouvement d'un point.

Deux sortes de faits constituent ce mouvement : les *déplacements* successifs du point, et les *temps* pendant lesquels ces déplacements s'effectuent.

Les déplacements se constatent et se définissent à l'aide de *points de repère*, d'*axes* ou de *plans de comparaison*, formant des

systèmes géométriques invariables. Si un tel système de comparaison est supposé fixe (et rien n'empêche de concevoir cet état de *repos*, quoique nous n'ayons aucun moyen de le vérifier, parce qu'il n'existe peut-être aucun corps immobile dans l'univers), le déplacement qui résulte du changement d'une au moins des coordonnées d'un point, s'appelle son déplacement *absolu*.

Si le système de comparaison a lui-même changé de position par rapport à un autre supposé fixe, le déplacement du point dont il s'agit est appelé son *déplacement relatif dans le système de comparaison mobile*.

2. **Temps. Instant.** — La notion simple du *temps* ou de la *durée* nous est acquise par l'expérience, comme nous avons acquis la notion de l'étendue. Nous avons l'idée nette de la continuité du temps, d'une durée égale à une autre, du rapport de deux durées ou temps quelconques; dès lors les temps sont des *quantités* et par conséquent peuvent entrer dans le calcul. L'unité de temps qu'on adopte généralement dans les applications des théories de la mécanique est la seconde (1^s), c'est-à-dire la 86400me partie du jour moyen solaire, ou de vingt-quatre heures (*).

Une portion quelconque du temps indéfini est un *temps limité;*

(*) De même qu'en enseignant les applications usuelles de la géométrie, on évite d'entrer dans le détail des opérations délicates et compliquées qui ont servi à l'établissement de notre système métrique, et d'expliquer le concours qu'elles ont exigé de connaissances mathématiques, physiques et astronomiques, de même il semblerait déplacé, au commencement de l'étude de la mécanique, d'essayer d'exposer les procédés savants et ingénieux qu'emploient l'astronomie et l'art de l'horlogerie pour résoudre le problème de la mesure du temps. Tout lecteur admettra, au moins provisoirement, qu'un temps quelconque peut être divisé par la pensée en autant de parties qu'on voudra proportionnellement à des nombres donnés, et exprimé numériquement, en prenant la seconde pour unité.

il a un commencement qui s'appelle *instant initial*, et une fin qui s'appelle *instant final* (*).

3. Trajectoire. — Un point étant en mouvement, la ligne droite ou courbe qu'il décrit s'appelle sa *trajectoire*.

4. Équations du mouvement d'un point dans l'espace. — Pour définir le mouvement d'un point, il faut exprimer le moyen de trouver à tout instant la situation de ce point. A cet effet, on introduit dans l'énoncé le temps écoulé à compter d'une origine convenue, instant initial, et les coordonnées variables nécessaires pour déterminer la situation du mobile. Si, par exemple, ces coordonnées sont x, y, z, mesurées sur trois axes concourants, et qu'on puisse obtenir trois équations distinctes (**),

$$\mathcal{F}_1(x, y, z, t) = 0, \quad \mathcal{F}_2(x, y, z, t) = 0, \quad \mathcal{F}_3(x, y, z, t) = 0,$$

les lettres $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ indiquant des fonctions déterminées, et la lettre t désignant le temps écoulé depuis l'instant initial, c'est-à-dire choisi pour origine des temps, jusqu'à l'instant où les coordonnées du point mobile sont devenues x, y et z, le mouvement du point (x, y, z) est rigoureusement défini, car à toute valeur de t, c'est-à-dire à tout instant choisi dans la succession du temps, répondent trois équations qui déterminent le mobile

(*) On voit que, dans le langage précis qui convient à une science mathématique, le mot *instant* a un sens plus restreint que dans le langage ordinaire, où il signifie souvent un *temps très-court*. En mécanique, l'instant n'a pas de durée, de même qu'en géométrie le point n'a pas de longueur. L'instant n'est pas même un temps infiniment petit, et nous évitons de dire « l'instant dt. »

(**) Nous appelons *équations distinctes* un groupe d'équations qui doivent être satisfaites simultanément et dont aucune n'est une conséquence nécessaire des autres. Deux groupes d'équations sont *équivalents* lorsque chacun d'eux a les mêmes solutions que l'autre.

par ses coordonnées. Ces trois équations ou leurs équivalentes s'appellent les *équations du mouvement* du point dans l'espace.

Lorsque, *à priori*, ou par les procédés de l'élimination, on peut obtenir une des coordonnées variables exprimée en fonction du temps, cette équation définit le mouvement de la projection du point mobile sur l'axe parallèle à cette variable; ainsi, par exemple, $x = \varphi(t)$ exprime le mouvement de la projection du point dont il s'agit sur l'axe des x, projection faite à chaque instant par un plan parallèle à celui des y et des z. Si l'on peut obtenir deux équations indépendantes de l'une des trois coordonnées, comme

$$f(x, y, t) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(x, y, t) = 0,$$

elles expriment le mouvement de la projection sur le plan des deux autres coordonnées, par exemple le plan des x et y (*).

Trois équations

$$x = \varphi(t), \quad y = \varphi_1(t), \quad z = \varphi_2(t),$$

qui donnent les trois coordonnées variables du point mobile, en fonctions explicites du temps, ramènent l'étude du mouvement quelconque d'un point dans l'espace à celle de trois mouvements rectilignes sur les axes coordonnés.

Si par l'élimination du temps t on obtient une équation en x, y et z, c'est l'équation d'une surface sur laquelle le point se meut; si l'on parvient à deux équations en x, y et z, ce sont les équations de la trajectoire. Si entre ces deux équations on élimine une des coordonnées variables, l'équation $f(x, y) = 0$,

(*) Les projections ont ici une signification plus générale que dans les questions ordinaires de la géométrie descriptive. Divers points se projettent, soit rectangulairement, soit obliquement, sur un plan par des parallèles à une droite directrice; ils se projettent sur une droite par des plans parallèles à un plan directeur.

par exemple, qui en résulte, est celle de la projection de la trajectoire sur le plan des deux axes parallèles aux coordonnées restantes (plan des x et des y), projection faite par des droites parallèles au troisième axe (axe de z).

Ces aperçus généraux, sur lesquels il serait superflu d'insister en ce moment, suffisent pour faire pressentir l'immense service que rend aux théories de la mécanique l'expression algébrique des projections des lieux géométriques suivant l'invention, aussi admirable que simple, de Descartes.

5. Équation du mouvement d'un point suivant sa trajectoire. — Lorsque la trajectoire est connue *à priori*, pour définir le mouvement du point qui la décrit, il suffit d'une seule équation $s = \varphi(t)$ ou $\mathcal{F}(s, t) = 0$ entre le temps t, et l'arc s, distance curviligne du mobile à une *origine* prise sur la trajectoire. C'est ce qu'on nomme l'*équation du mouvement du point suivant sa trajectoire* (*).

6. Le temps peut être négatif. — Dans toutes ces équations, les coordonnées ou distances sont, comme on sait, positives ou négatives. Il en peut être de même du temps, dont les valeurs positives sont des durées qui s'écoulent entre l'instant choisi pour origine ou instant initial, et des instants postérieurs; les valeurs négatives sont écoulées depuis des instants antérieurs jusqu'à l'origine des temps positifs.

7. Autres moyens d'exprimer le mouvement. — Dans la pratique on ne peut pas toujours trouver la fonction exacte qui

(*) Remarquons que dans l'équation $s = \varphi(t)$, la distance s peut être l'espace parcouru pendant le temps t; si l'on a, par exemple, $s = at^2$, cette équation exprime qu'à l'instant initial où $t = 0$, la distance s est nulle aussi, c'est-à-dire que le point mobile est à l'origine des distances s; qu'ensuite il a parcouru, au bout d'une unité de temps, l'espace a; au bout de deux unités, l'espace $4a$; et ainsi de suite. Mais il n'en est pas de même, en général, comme on va le voir au numéro 10.

lie l'espace au temps. On emploie alors deux moyens pour exprimer, au moins approximativement, la loi du mouvement d'un point sur une ligne connue : 1° On dresse un tableau à deux colonnes dans l'une desquelles on écrit les temps t comptés à partir d'un instant initial, par exemple les diverses valeurs de l'*heure* marquée par une montre, un chronomètre, et dans l'autre on inscrit les distances correspondantes s du mobile à une origine prise sur la trajectoire ; 2° on construit une courbe dont les coordonnées sont proportionnelles, les unes au temps t, les autres aux distances s. On peut, à cet effet, faire usage, soit de coordonnées parallèles à deux axes concourants, soit de coordonnées polaires, soit de tout autre moyen d'exprimer la coexistence de deux coordonnées susceptibles de valeurs quelconques. Nous verrons plus tard (sect. II, chap. VII) l'indication d'appareils qui réalisent utilement ces divers modes de représentation d'un mouvement.

§ 2.

DU MOUVEMENT UNIFORME D'UN POINT.

8. Définition du mouvement uniforme. — Le mouvement est *rectiligne* ou *curviligne*, selon que sa trajectoire est droite ou courbe. Dans l'un et l'autre cas, il est *uniforme* lorsque ce point parcourt, dans un même sens des longueurs égales en des temps égaux, quelque petits que soient ces temps ; d'où il suit que, tant que ce mouvement subsiste, des portions quelconques de l'espace parcouru sont proportionnelles aux temps employés à les parcourir.

Deux mouvements uniformes se distinguent l'un de l'autre par la grandeur des espaces parcourus dans un même temps. De là la notion de la vitesse. Si l'on nomme

E' une certaine portion de l'espace linéaire que parcourt un point,

T' le temps écoulé pendant qu'elle est parcourue,

E une autre portion d'espace, parcourue par le même point,

T le temps écoulé pendant le parcours de cette longueur E, le mouvement du point considéré est uniforme lorsqu'on a, quel que soit E,

$$\frac{E}{E'} = \frac{T}{T'}, \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \frac{E}{T} = \frac{E'}{T'}.$$

La première de ces deux équations exprime l'égalité de deux rapports ou nombres abstraits indépendants du choix des unités de longueur et de temps. La deuxième indique l'égalité de deux quantités dont l'énonciation numérique varie selon le choix des unités. Elle suppose au moins que les temps T et T' sont rapportés à une même unité, d'ailleurs quelconque, car on ne comprendrait pas, sans cette opération préalable, la signification des quotients $\frac{E}{T}, \frac{E'}{T'}$. D'ailleurs la deuxième équation est homogène comme la première, c'est-à-dire que, si elle est vérifiée pour certaines unités d'espace et de temps, elle le sera également quand on changera ces unités.

Si l'on désigne par a le quotient $\frac{E}{T}$, la propriété du mouvement uniforme se trouve exprimée par l'équation

$$\frac{E}{T} = a \quad \text{ou} \quad E = aT,$$

dans laquelle a est une constante, tandis que E et T sont des variables.

La quantité a qui, pour un mouvement uniforme déterminé, dépend du choix de l'unité de temps, est, d'après la dernière formule, l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou au moins celui qui serait parcouru dans l'unité de temps, si le mouve-

ment était suffisamment prolongé en restant toujours uniforme.

Cette quantité a ou $\frac{E}{T}$ s'appelle l'*intensité* ou la *grandeur absolue de la vitesse* du point dont il s'agit.

Ainsi *la vitesse dans le mouvement uniforme est mesurée en grandeur absolue par l'espace parcouru dans l'unité de temps, ou, plus généralement, par le quotient qu'on obtient en divisant un des espaces parcourus par l'expression numérique du temps employé à parcourir cet espace.* Nous donnerons plus loin (13) pour la vitesse une définition plus générale et plus complète qui a égard au sens du mouvement et qui comprend les cas où ce mouvement n'est pas uniforme. Dès à présent il est bon de remarquer et de retenir que *dans le mouvement uniforme l'espace parcouru est égal à la vitesse multipliée par le temps, et que le temps est égal à l'espace parcouru divisé par la vitesse.*

9. Unités employées pour exprimer la vitesse. — L'expression numérique de la vitesse exige le choix de deux unités, l'une pour les temps, l'autre pour les longueurs. L'unité de temps adoptée généralement dans l'application des formules de la mécanique est, comme nous l'avons dit, la *seconde* (1^s). L'unité de longueur ou d'espace dont nous ferons usage dans les exemples sera le mètre (1^m). On exprime cette double convention en disant que la vitesse est comptée *en mètres par seconde*. Néanmoins on se sert quelquefois d'expressions telles que celles-ci : vitesse de tant de pieds par minute, de tant de lieues par heure. Un mouvement uniforme étant défini sous une telle forme, il est aisé d'en conclure la vitesse en mètres par seconde. Par exemple, la vitesse d'une lieue (de 4 kilomètres) par heure et celle de 100 pieds anglais par minute reviennent, en mètres par seconde, l'une à

$$\frac{4000}{3600} = 1 + \frac{1}{9},$$

l'autre à

$$\frac{100 \cdot 0{,}3048}{60} = 0{,}508\ (*).$$

10. Équation générale du mouvement uniforme. — On conçoit que, pour définir le mouvement uniforme d'un point sur une ligne donnée, ce n'est pas assez de faire connaître la situation du mobile à un instant déterminé et l'*intensité* de sa vitesse; il faut encore exprimer le *sens* de cette vitesse. Or, il suffit d'avoir compris l'usage qu'en géométrie analytique on fait des signes algébriques dans l'expression de la position d'un point sur une ligne donnée, pour étendre leur emploi à la détermination du sens de la vitesse, comme nous allons le faire en résolvant la question suivante :

PROBLÈME. *Connaissant,* 1° *la position* M_0 (**) *qu'occupe à un certain instant un point mobile sur une ligne déterminée* Os (fig. 1) ;

2° *L'intensité de la vitesse de ce point en mouvement uniforme;*

3° *Le sens de ce mouvement, soit de* M_0 *vers* s, *soit à l'opposé; il s'agit d'exprimer la position* M *du mobile après un certain temps écoulé depuis l'instant où il se trouvait en* M_0.

Pour le faire de la manière la plus générale, on nommera

t le temps écoulé à partir de l'instant où le mobile était en M_0, instant qui est dit *initial*, parce que c'est à lui que commence le temps désigné par t;

s_0 la distance du point M_0 à un point O, appelé *origine* des

(*) Dans la navigation maritime, l'unité de vitesse est le *nœud*. Le nombre de nœuds que *file* un navire est égal au nombre de milles marins qu'il parcourt en une heure. On sait que le mille marin est le tiers d'une lieue marine, ou un soixantième de degré terrestre : sa longueur est donc à peu près de 1852 mètres. Ainsi, un nœud répond à une vitesse de 1852 mètres par heure ou $0^m,514$ par seconde.

(**) Les notations M_0, s_0 se lisent : M indice zéro, s indice zéro.

distances, et supposé connu sur la ligne Os; cette distance s_0 doit être comprise algébriquement, c'est-à-dire que c'est implicitement une *longueur affectée d'un signe* qui sera + ou —, selon qu'elle sera portée à partir de O dans le sens adopté pour positif ou dans le sens contraire; le point M_0 que détermine la quantité s_0 s'appelle *position initiale* du point mobile, et par là il ne faut pas entendre que le mobile est parti de cette position, mais il faut entendre qu'il l'occupait *au commencement du temps t;*

V la vitesse du mobile, quantité constante, mais positive ou négative selon que le mobile marche dans le sens positif ou en sens contraire;

s la distance du mobile à l'origine O après le temps t, distance dont le signe fera connaître le sens dans lequel elle devra être portée.

Cela posé, il est facile de voir qu'on aura

$$s = s_0 + Vt. \qquad [1]$$

Cette équation, dont on vérifiera aisément l'exactitude pour toutes les hypothèses possibles relatives aux valeurs et aux signes des quantités qui y entrent, s'appelle l'*équation en termes finis du mouvement* du mobile désigné dans l'énoncé de la question dont il s'agit ici. Elle s'applique à un cas quelconque du *mouvement uniforme d'un point,* pourvu qu'on donne aux constantes s_0 et V les valeurs qui conviennent à ce cas, et qui ne sont pas d'ailleurs toujours données explicitement, comme on va le voir par un exemple.

11. Exemple de mouvement uniforme. — *Connaissant les positions du mobile à deux instants donnés, et sachant d'ailleurs que son mouvement sur une ligne connue est uniforme, trouver l'équation de ce mouvement.*

L'équation cherchée est de la forme $s = s_0 + Vt$, mais les

quantités constantes s_0 et V ne sont pas données immédiatement ; il s'agit de les calculer. A cet effet, on prendra à volonté l'origine des distances et celle des temps.

s_1 et s_2 étant les distances, à l'origine O, des deux positions connues ;

t_1 et t_2 étant les temps écoulés depuis l'instant choisi pour initial jusqu'à ceux qui correspondent à ces deux positions,

L'équation générale ci-dessus [1] doit être vérifiée quand on y substitue pour s et t les valeurs simultanées s_1 et t_1, puis s_2 et t_2 ; on a donc deux équations pour calculer les constantes inconnues s_0 et V, savoir :

$$s_1 = s_0 + Vt_1 \quad \text{et} \quad s_2 = s_0 + Vt_2$$

d'où

$$V = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \text{et} \quad s_0 = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1};$$

et l'équation du mouvement dont il s'agit, c'est-à-dire celle qui donne la position du mobile à chaque instant, est obtenue par la substitution de ces expressions de V et de s_0 dans l'équation générale [1]. On a ainsi

$$s = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1} + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} t.$$

Cette équation peut être mise sous les formes

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) \quad \text{et} \quad s - s_2 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}(t - t_2),$$

qu'il est d'ailleurs facile d'écrire immédiatement, en considérant que l'espace $s - s_1$, par exemple, est parcouru dans le temps $t - t_1$, avec une vitesse égale à l'espace $s_2 - s_1$ divisé par le temps $t_2 - t_1$ employé à parcourir ce dernier espace.

§ 3.

DU MOUVEMENT VARIÉ D'UN POINT SUR UNE LIGNE DONNÉE.

12. Mouvement varié. — Mouvement périodiquement uniforme. — Lorsque le mouvement d'un point n'est pas uniforme, il est dit *varié*. Il est *périodiquement uniforme* si certains espaces successifs égaux sont parcourus suivant la même loi relativement au temps mis à les parcourir, sans que la même condition soit remplie par les parties de chacun de ces espaces. Tel est, par exemple, le mouvement d'un point de l'aiguille d'une montre à secondes. Tel est encore le mouvement annuel du soleil relativement à la terre.

13. Vitesse. — Il importe de bien comprendre ce qu'on entend par la vitesse d'un point à un instant déterminé, dans le mouvement varié.

Soit **M** la position de ce point à un certain instant, et soit Δs l'espace positif ou négatif qu'il parcourt ensuite pendant un certain temps Δt, lequel peut être assez petit pour que pendant tout ce temps le mobile s'éloigne constamment de la position **M**. Si l'on divise Δs par l'expression numérique de Δt, le quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de même signe que Δs, est l'expression de la *vitesse moyenne* avec laquelle l'espace Δs est décrit; et la direction de cette vitesse moyenne est suivant la corde joignant le point **M** à celui qu'occupe le mobile à la fin du temps Δt.

Or si, dans le calcul, on fait décroître indéfiniment Δt, l'espace Δs partant toujours du point **M** approche sans cesse et autant qu'on veut de zéro; mais le quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tend vers une limite déterminée, positive ou négative, qui, suivant la notation du calcul

différentiel, est désignée par $\frac{ds}{dt}$, en même temps que la direction de la corde approche de se confondre avec la tangente en M. Ces deux limites de valeur et de direction constituent la *vitesse* du mobile à l'instant où il occupe la position M. C'est ce qu'on énonce d'une manière abrégée, en disant que

La vitesse d'un point en une position déterminée est dirigée suivant la tangente à la trajectoire en ce point et a sa grandeur exprimée par l'espace infiniment petit, positif ou négatif, qu'il décrit à partir de cette position, divisé par l'expression numérique du temps infiniment petit employé à décrire cet espace.

Si donc l'équation du mouvement est $s = f(t)$, et si l'on appelle v la vitesse à la fin du temps quelconque t, on a, conformément aux notations connues du calcul différentiel,

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t),$$

quantité positive ou négative, selon que le point marche à cet instant dans le sens positif des s, ou en sens contraire.

Réciproquement, si la vitesse était une fonction connue du temps, on en conclurait la relation nécessaire entre le déplacement du mobile et le temps écoulé pendant ce déplacement. En effet, de

$$v = \frac{ds}{dt} = f(t), \text{ on tire } ds = f(t)\,dt, \text{ d'où } s - s_0 = \int_0^t f(t)\,dt.$$

Nous allons appliquer ces considérations à deux exemples.

14. Mouvement uniformément varié. — Le mouvement d'un corps tombant librement dans le vide, et le mouvement du centre d'un corps sphérique homogène abandonné à l'action de la pesanteur, et roulant sur un plan incliné, appartiennent au genre le plus simple du mouvement varié; l'expérience constate

que, si l'on compte l'espace parcouru et le temps écoulé à partir du point et de l'instant où le corps, d'abord en repos, est simplement abandonné à la pesanteur, l'espace variable décrit par un point quelconque du corps dans le premier cas, et le centre de la sphère parallèlement au plan dans le second cas, est proportionnel au quarré du temps. Ce mouvement peut donc être exprimé par la formule

$$e = bt^2.$$

Si l'espace est mesuré à partir d'un point O quelconque de la droite sur laquelle se meut un point du premier corps ou le centre de la sphère, et si l'on commence à compter le temps à un instant différent de celui du départ, l'expression de la distance x du point mobile à l'origine O, après le temps t, est de la forme

$$x = x_0 + at + bt^2$$

qui convient encore, moyennant des signes convenables donnés aux constantes x_0, a et b, au cas où le point mobile dont il s'agit, avant d'être abandonné, reçoit d'un moteur quelconque un mouvement, soit ascendant soit descendant, suivant la verticale ou suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné.

Il n'est pas question d'expliquer ici pourquoi l'équation ci-dessus a lieu ; mais, en la regardant comme l'expression d'un fait expérimental (*), il s'agit de faire mieux comprendre, à l'aide de cet exemple, ce qu'on entend par la vitesse à un instant déterminé dans le mouvement varié.

On peut y parvenir sans recourir au calcul différentiel. Si l'on suppose une valeur déterminée donnée à t, on a par la formule

$$x = x_0 + at + bt^2$$

(*) On le reconnaît en constatant que les distances du mobile à un point fixe O, après des temps en progression arithmétique, forment une série dont les différences secondes sont égales, d'où il suit que x est une fonction du second degré de t.

la valeur correspondante de x, qui fait connaître la position du mobile à la fin de ce temps. Soit Δt un petit temps écoulé à la suite de t, et soit x_1 la distance du mobile à l'origine des x, à la fin de cet accroissement du temps. On a pour déterminer x_1 l'équation

$$x_1 = x_0 + a\,(t + \Delta t) + b\,(t + \Delta t)^2.$$

La différence $x_1 - x$ est l'espace décrit pendant le temps Δt succédant au temps t; son signe, dans chaque cas, indiquerait le sens du mouvement, et, en divisant cet espace par Δt, on aurait la vitesse moyenne pendant ce temps. Ainsi,

$$\frac{x_1 - x}{\Delta t} = a + 2bt + b\Delta t = \text{vitesse moyenne.}$$

A mesure que Δt diminue, cette quantité s'approche indéfiniment de $a + 2bt$, qui est par conséquent (13) la vitesse cherchée à la fin du temps t. C'est ce qui s'écrit ainsi :

$$v = a + 2bt.$$

On parvient immédiatement à ce résultat par la formule $v = \frac{ds}{dt}$, qui devient $v = \frac{dx}{dt}$, appliquée à l'équation

$$x = x_0 + at + bt^2,$$

suivant les règles les plus simples du calcul différentiel.

On conclut de ce qui précède :

1° Que, dans le mouvement exprimé par $x = x_0 + at + bt^2$, la vitesse varie à chaque instant ;

2° Que sa valeur, quand le temps t commence, est a, quantité positive ou négative, qu'on appelle *vitesse initiale* et que nous désignerons souvent par v_0;

3° Que la vitesse s'accroît, par unité de temps, de la quantité $2b$ positive ou négative, mais constante, qui s'appelle *accélération constante*, et que nous désignerons souvent par la lettre j.

La propriété d'accélération constante a fait nommer le mouvement dont il s'agit *mouvement uniformément varié*. Ce mouvement est donc caractérisé par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2, \\ v &= v_0 + jt, \\ \frac{dv}{dt} &= j, \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

dans lesquelles chaque lettre a une signification dont il importe de se bien pénétrer, en se rappelant que x_0, v_0 et j sont des constantes positives ou négatives.

15. Remarques sur les équations et les propriétés du mouvement uniformément varié. — 1° Des trois équations ci-dessus, les deux dernières ont été déduites de la première. Réciproquement, on peut de la dernière conclure les deux autres, sauf les valeurs de v_0 et de s_0 qui restent arbitraires. En effet, en intégrant les deux membres de l'équation $dv = j\,dt$, à partir de $t = 0$, on a

$$v - v_0 = jt;$$

puis, en mettant pour v son expression $\frac{dx}{dt}$ dans cette dernière équation, qui devient, par la séparation des variables,

$$dx = v_0\,dt + jt\,dt,$$

et en intégrant, on obtient $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$.

2° L'équation $v = v_0 + jt$ donne, pour une certaine valeur

de t, une valeur *nulle* à la vitesse v. Il faut bien remarquer qu'en général *une vitesse nulle n'est pas toujours la même chose que le repos.* Un point est en repos lorsque, pendant un temps fini, il occupe constamment la même position. Un point en mouvement a une vitesse nulle à un instant déterminé lorsque sa vitesse moyenne $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ pendant le temps Δt qui succède à cet instant a pour limite *zéro*, c'est-à-dire devient aussi petite qu'on veut, à mesure qu'on fait décroître Δt.

3° En éliminant j entre les deux premières des équations [2], on a

$$x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} t \quad \text{ou} \quad \frac{x - x_0}{t} = \frac{v_0 + v}{2}$$

c'est-à-dire que, *dans le mouvement uniformément varié, la vitesse moyenne pendant un certain temps t, est la moyenne arithmétique des vitesses prises aux deux instants extrêmes de ce temps.*

4° De la première des équations [2] on tire

$$v_0 + j\frac{t}{2} = \frac{x - x_0}{t}$$

c'est-à-dire que, *dans le mouvement uniformément varié, la vitesse à un instant quelconque* $\left(\text{fin du temps } \frac{t}{2}\right)$ *est la vitesse moyenne du mobile pendant un temps dont le milieu est ce même instant.*

5° En éliminant le temps t entre les deux premières équations [2], on obtient

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = j(x - x_0)$$

de sorte que, *dans le mouvement uniformément varié, la moitié de*

l'accroissement du quarré de la vitesse est égale au produit de l'accélération constante par l'espace parcouru.

16. Mouvement oscillatoire. — On suppose qu'un point M se meuve uniformément sur une circonférence BAC (fig. 2), et que ce point soit à chaque instant projeté rectangulairement sur un diamètre BC. On demande les équations du mouvement de la projection P.

Soient V la vitesse constante sur la circonférence,
r le rayon OA,
x la distance OP,
t le temps pendant lequel le mobile passe de A en M et sa projection de O en P,
v la vitesse de la projection P à la fin de ce temps.

On a d'abord

$$x = r \sin \text{AOM}, \text{ et angle AOM} = \frac{\text{AM}}{r} = \frac{Vt}{r};$$

d'où

$$x = r \sin \frac{Vt}{r}. \qquad [1]$$

Puis

$$v = \frac{dx}{dt} = r \cos \frac{Vt}{r} \cdot \frac{V}{r} = V \cos \frac{Vt}{r}. \qquad [2]$$

On peut éliminer le temps, ce qui donne

$$v = \frac{V}{r} \sqrt{r^2 - x^2}. \qquad [3]$$

La vitesse v est donc proportionnelle à l'ordonnée MP. Elle

est nulle quand le mobile principal est en B ou en C. Son maximum est V et a lieu quand le mobile est en A. Elle devient négative quand il se trouve au-dessous du diamètre BC.

La durée de l'oscillation de B en C ou de C en B est celle du parcours de la demi-circonférence BAC, par le mobile M ayant la vitesse constante V; c'est donc $\frac{\pi r}{V}$, (8), ou π divisé par le coefficient de l'ordonnée dans l'expression [3] de la vitesse v.

Remarque. Le mouvement oscillatoire que nous venons d'étudier se trouve fréquemment dans les applications de la mécanique. Toutes les fois qu'on rencontrera un mouvement dans lequel la vitesse d'un point soit exprimée par une fonction de la forme $\sqrt{a + bx - c^2 x^2}$, la distance variable du mobile à un point fixe de sa trajectoire étant x, on en conclura, en changeant l'origine des distances,

Que la vitesse peut être représentée par $c\sqrt{r^2 - x'^2}$,

Que le mouvement dont il s'agit est le mouvement oscillatoire qu'on obtiendrait en imaginant qu'un point se meut uniformément sur une circonférence dont le rayon est r et en projetant ce point à chaque instant sur un diamètre,

Enfin que la durée de chaque oscillation du mobile est $\frac{\pi}{c}$, ce qu'on trouverait d'ailleurs par le calcul intégral en posant $\frac{dx'}{dt} = c\sqrt{r^2 - x'^2}$, d'où $dt = \frac{1}{c}\frac{dx'}{\sqrt{r^2 - x'^2}}$ et en intégrant depuis $x' = -r$ jusqu'à $x' = r$.

§ 4.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE LA VITESSE.

17. Courbe représentative des espaces. — Si le mouvement d'un point sur sa trajectoire est figuré (7) par une courbe

dont les coordonnées parallèles à deux axes représentent (moyennant deux échelles convenues des temps et des espaces) les unes les temps t, les autres les distances s du mobile à un point fixe de sa trajectoire, on peut en conclure la vitesse par un procédé graphique :

1° Dans le cas où le mouvement serait uniforme, au lieu d'une courbe on aurait une droite; et la vitesse serait représentée par la longueur constante positive ou négative dont varierait l'ordonnée variable s pour chaque accroissement positif de l'abscisse exprimant suivant l'échelle l'unité de temps.

Les lecteurs feront bien de s'exercer à tracer les différentes positions de la droite représentant un mouvement uniforme, suivant la diversité des échelles et suivant les signes des quantités s_0 et V dans l'équation [1] du numéro 10.

2° Dans un mouvement varié quelconque, l'inclinaison de la courbe représentative, en un point, relativement à l'axe des temps donne, eu égard aux échelles, la vitesse à l'instant correspondant : cela résulte soit de la définition de la vitesse (13) soit de l'équation $v = \frac{ds}{dt}$. La vitesse à la fin du temps t s'obtient en menant, par le point dont l'abscisse figure ce temps, une tangente à la courbe représentative, et en mesurant à l'échelle des distances l'accroissement que l'ordonnée de cette tangente prend pour un accroissement de l'abscisse figurant suivant l'autre échelle l'unité de temps.

Suivant que la courbe tourne sa concavité vers les ordonnées s positives ou du côté opposé, la vitesse est croissante dans le premier cas, ou décroissante dans le second, pendant que le temps croît. A un point d'inflexion répond un maximum ou un minimum de la vitesse, maximum si à la concavité vers les s positives succède la convexité, minimum dans le cas contraire. A un point où la tangente à la courbe représentative est parallèle à l'axe des temps t, la vitesse est instantanément nulle.

Si, par exemple, le mouvement d'un point sur sa trajectoire est uniformément varié (14) et a par conséquent pour équation $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$, la courbe dont les coordonnées parallèles à deux axes représentent ce mouvement est une parabole (fig. 3) dont l'axe principal est une parallèle aux s. L'ordonnée à l'origine est la distance initiale s_0 ; la tangente au point dont l'abscisse est nulle ayant pour équation $s' = s_0 + v_0 t$, si l'on appelle s_1' l'ordonnée de cette tangente qui correspond à $t = 1$, et s_1 l'ordonnée de la parabole correspondante à la même abscisse $t = 1$, on a $s_1' - s_0 = v_0$, et $s_1 - s_1' = \frac{1}{2} j$.

18. Courbe représentative des vitesses. — La loi suivant laquelle varie la vitesse dans un mouvement quelconque peut être rendue encore plus sensible par une autre construction graphique. On déterminera, comme on vient de le voir, les valeurs de la vitesse correspondantes à diverses valeurs du temps. Cela fait, on construira par points une courbe dont les abscisses seront, moyennant une certaine échelle, proportionnelles aux temps t et les ordonnées proportionnelles, moyennant une autre échelle, aux vitesses v correspondantes.

Dans le second mode de représentation du mouvement d'un point, la distance $s - s_0$ (qui sépare la position initiale du mobile de celle qu'il occupe à la fin du temps t) étant (13) l'intégrale $\int v dt$ est représentée par l'aire comprise entre la courbe, l'axe des temps et les deux ordonnées qui répondent l'une à l'origine, l'autre à l'extrémité du temps t, pourvu que l'on convienne que l'unité de distance est représentée par l'aire d'un parallélogramme qui aurait pour côtés parallèles aux axes les lignes choisies pour représenter l'unité des temps sur l'axe des abscisses et l'unité des vitesses portées en ordonnées. Il doit être entendu que, si entre les deux instants extrêmes la vitesse

change de signe, il faut prendre positivement l'aire située au-dessus de l'axe des temps, et négativement celle qui se trouve au-dessous.

Ces considérations géométriques peuvent servir à démontrer que, lorsque la vitesse est donnée par la formule $v = v_0 + jt$, la distance du mobile, après le temps t, à sa position initiale, est $v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$, quels que soient les signes de v_0 et de j. Nous ne donnerons pas ici cette démonstration, parce que la proposition a été établie précédemment (15) par le calcul.

§ 5.

DE LA VITESSE D'UN POINT DONT LE MOUVEMENT EST EXPRIMÉ EN COORDONNÉES PARALLÈLES A TROIS AXES.

19. Projection de la vitesse sur un axe. — Lorsque la trajectoire d'un point dans l'espace n'est pas immédiatement connue, le moyen le plus simple de définir son mouvement est (5) de rapporter ce point à trois axes concourants non situés dans un même plan, et de fournir la possibilité de calculer pour toute valeur du temps t chacune des trois coordonnées x, y et z du mobile.

Projection sur un axe d'un point en mouvement. Cela posé, il est aisé de vérifier les remarques suivantes :

1° Les expressions de x, de y et de z en fonction du temps font connaître le mouvement des projections conjuguées du mobile sur les axes, chaque projection étant faite sur un axe par un plan parallèle aux deux autres;

2° Les déplacements Δx, Δy, Δz de ces projections pendant le temps Δt sont les projections, sur les axes, de la corde MM_1 joignant les deux positions M et M_1 que le mobile occupe au commencement et à la fin de ce temps;

3° Par conséquent les quotients $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ qui sont les vitesses moyennes des projections du mobile sont les projections du quotient $\frac{MM_1}{\Delta t}$, qui, à mesure que Δt diminue, finit par différer aussi peu qu'on veut de la vitesse moyenne du mobile sur sa trajectoire pendant le temps Δt;

4° Par conséquent, les limites $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, vitesses des projections du mobile à la fin du temps t, sont les projections de la droite qui, étant égale à la limite $\frac{ds}{dt}$ et dirigée suivant la tangente à la trajectoire, exprime la vitesse du mobile dans l'espace. Ainsi :

THÉORÈME. *La vitesse de la projection, sur un axe, d'un point en mouvement dans l'espace, est égale à la projection sur le même axe de la vitesse de ce mobile.*

Les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont souvent représentées par v_x, v_y, v_z (prononcez v indice x, etc.), notations qui indiquent tout à la fois les vitesses des projections obliques ou rectangulaires du point dont la vitesse est v, et les projections de cette vitesse. Ces quantités sont positives ou négatives, de mêmes signes que les accroissements dx, dy, dz, tandis que v comme ds, pouvant avoir toutes les directions dans l'espace, n'a point de signe.

La notation v_x n'a une signification complétement déterminée qu'autant que l'on connaît la situation angulaire du plan yOz coordonné avec l'axe Ox.

Lorsqu'il s'agit de projections rectangulaires, on a

$$v_x = v\cos(v, x), \quad v_y = v\cos(v, y), \quad v_z = v\cos(v, z).$$

EXEMPLE. Dans le cas du numéro 16, la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du point P

est la projection de la vitesse V du point **M**, dirigée suivant la tangente à la circonférence. On a donc immédiatement

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \mathrm{AOM}.$$

20. Corollaire. — *La vitesse d'un point dans l'espace est la diagonale d'un parallélipipède dont les arêtes contiguës sont égales et parallèles aux vitesses des projections du mobile sur trois axes coordonnés.*

Dans le cas où ces trois axes sont rectangulaires, on a

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

21. Projection sur un plan d'un point en mouvement dans l'espace.— Imaginons que, pendant qu'un point se meut dans l'espace, on le projette continuellement sur un plan **xOy** par des parallèles à l'axe **Oz** (fig. 4). On a ainsi sur ce plan la trajectoire de la projection qui est aussi la projection de la trajectoire du mobile. L'arc **NN'**, joignant deux points de cette projection, est la projection de l'arc **MM'** compris entre les deux positions correspondantes du mobile sur la trajectoire. Si l'on suppose ces arcs infiniment petits, l'un est encore la projection de l'autre; il en est de même de leurs quotients par l'expression numérique du temps dt pendant lequel ils sont parcourus; ces quotients sont, l'un la vitesse de la projection suivant la tangente en **N**, l'autre la vitesse du mobile suivant la tangente en **M**. Donc

Théorème. *La vitesse de la projection sur un plan d'un point en mouvement dans l'espace est en grandeur et en direction la projection sur le même plan de la vitesse de ce mobile.*

Remarque. La vitesse de la projection suivant **NN'**, a évidemment les mêmes projections sur les axes **Ox** et **Oy** que la vitesse v suivant **MM'**. Elle est donc la diagonale d'un parallélo-

gramme dont les côtés contigus sont égaux et parallèles aux vitesses v_x et v_y.

§ 6.

DE LA VITESSE D'UN POINT DONT LE MOUVEMENT EST EXPRIMÉ EN COORDONNÉES POLAIRES.

22. Trajectoire plane. — Soient

O (fig. 5) le pôle et OL l'axe polaire auxquels sont rapportées les positions successives d'un point mobile;

M la position qui correspond à la fin du temps t;

r le rayon vecteur variable OM;

α l'angle variable MOL.

Deux équations $\mathcal{F}(r, \alpha, t) = 0$ et $\mathcal{F}_1(r, \alpha, t) = 0$, ou plus simplement $r = \varphi(t)$ et $\alpha = \varphi_1(t)$, définiront complétement le mouvement du mobile dans le plan MOL.

L'équation $r = \varphi(t)$ seule fait connaître la loi du mouvement de ce mobile le long d'une droite qui coïncide continuellement avec le rayon vecteur. La vitesse de ce mouvement, qui est appelée *vitesse relative* du point mobile sur le rayon vecteur, et que nous désignerons par v_r, est exprimée par $\frac{dr}{dt}$, quantité positive ou négative.

L'équation $\alpha = \varphi_1(t)$ seule fait connaître la loi suivant laquelle varie la distance angulaire du rayon vecteur à l'axe polaire OL. La dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$ est ce que l'on appelle la *vitesse angulaire* du rayon vecteur ou du point M autour du pôle O. On peut se représenter cette quantité comme étant la *vitesse linéaire du point situé à l'unité de distance du pôle sur le rayon vecteur;* mais on doit remarquer que, pour un mouvement déterminé du rayon vecteur, l'expression de la vitesse angulaire reste numériquement la même, quelle que soit l'unité de dis-

tance ou de longueur; c'est donc un nombre abstrait (*), et cela devait être, puisque α est lui-même un simple rapport. Nous désignerons la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ par w.

Lorsqu'une droite, telle que OM, tourne uniformément autour d'un de ses points, c'est-à-dire que les angles qu'elle décrit sont proportionnels aux temps mis à les décrire, l'usage des praticiens est de déterminer sa vitesse de rotation par le nombre de révolutions ou de *tours* qu'elle fait par minute. Si n est ce nombre, la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ de la droite est, comme il est aisé de le voir, $\frac{2\pi n}{60}$.

Connaissant r, $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{d\alpha}{dt}$ à un certain instant, on en conclut la vitesse v du mobile à cet instant. Soit M' la position du mobile à la fin du temps $t + dt$. Menons la droite OM' et l'arc circulaire infiniment petit MN. Nous aurons le triangle différentiel rectangle MM'N formé de l'arc de trajectoire MM' ou ds, de NM' égal à dr et de MN égal à $r\,d\alpha$; ainsi

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\alpha^2},$$

et par suite

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2},$$

ou

$$v = \sqrt{v_r^2 + r^2 w^2}.$$

(*) Si, par exemple, la vitesse angulaire est 4, cela veut dire que, dans le cas où le rayon OM tourne uniformément, son point situé à 1 mètre du centre fixe parcourt 4 mètres par seconde, tandis que les points situés à 1 décimètre, à 1 kilomètre, à 1 pied, parcourent 4 décimètres, 4 kilomètres, 4 pieds, ce qui exprime évidemment le même déplacement du rayon indéfiniment prolongé.

Le produit rw est la vitesse d'un point qui, coïncidant avec **M**, resterait immobile sur le rayon vecteur, mais serait *entraîné* avec celui-ci. C'est pourquoi on l'appelle *vitesse d'entraînement* du point **M**.

On peut encore calculer l'angle β de la courbe **MM'** avec le prolongement du rayon vecteur. On a

$$\cos\beta = \frac{dr}{ds} = \frac{v_r}{v}, \quad \sin\beta = \frac{r\,d\alpha}{ds} = \frac{rw}{v}.$$

On peut aussi exprimer la distance variable p de l'origine **O** à la tangente en **M**, savoir :

$$p = r\sin\beta = r^2\frac{d\alpha}{ds} = r^2\frac{w}{v}.$$

Enfin, il peut être utile de considérer l'aire M_0OM décrite par le rayon vecteur et dont l'accroissement pendant le temps dt est l'aire **MOM'** que nous désignerons par $d\omega$. En négligeant le triangle **MM'N** comme infiniment petit par rapport au triangle **MON**, on a

$$d\omega = \frac{1}{2}r^2 d\alpha \quad \text{d'où} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}r^2 w.$$

On obtient le même résultat en écrivant

$$d\omega = \frac{1}{2}p\,ds = \frac{1}{2}r^2\,d\alpha.$$

La quantité $\frac{d\omega}{dt}$, qui exprime la loi suivant laquelle l'aire ω croît avec le temps, s'appelle la *vitesse aréolaire* du point **M** autour de **O**. Elle peut être constante, et alors les aires décrites

par le rayon vecteur, pendant des temps quelconques, sont proportionnelles à ces temps.

23. Trajectoire quelconque dans l'espace. — La position du point mobile à chaque instant peut être définie par trois coordonnées polaires :

1° Le rayon vecteur **OM** ou r (fig. 6);

2° L'angle **mOL** ou α que sa projection orthogonale **Om** sur un plan fixe, mené par **O**, fait avec une droite immobile **OL** de ce plan;

3° L'angle **MOm** ou γ que ce même rayon vecteur fait avec le plan fixe.

Trois équations entre les trois variables r, α, γ et le temps t définiraient le mouvement du mobile. Si elles étaient ramenées aux formes explicites

$$r = f(t), \quad \alpha = f_1(t), \quad \gamma = f_2(t),$$

la première, seule, ferait connaître le mouvement relatif du mobile suivant le rayon vecteur; la deuxième donnerait le mouvement angulaire de la projection du rayon vecteur sur le plan fixe **mOL**; la troisième ferait connaître le mouvement angulaire du rayon vecteur par rapport à la droite fixe **Oz** menée par **O** perpendiculairement au même plan **mOL**.

Cherchons la vitesse du mobile à l'instant de son passage en **M**. Ce point se projette perpendiculairement en **m** sur le plan **mOL**, et l'on a $\mathbf{Om} = r\cos\gamma$. Soit **MM'** ou ds l'arc infiniment petit que le mobile parcourt pendant le temps dt. Le rayon vecteur **OM'** est égal à $r + dr$; il fait, avec sa projection orthogonale **Om'** sur le plan **LOm**, l'angle $\gamma + d\gamma$; et l'angle **m'Om** est exprimé par $d\alpha$. Projetons rectangulairement **M** en **N** sur le plan **M'Om'**, **N** en **Q** sur la droite **OM'**, et **m** en **n** sur **Om'**. Le chemin polygonal **MNQM'** qui conduit de **M** en **M'** est ainsi formé de trois

côtés, dont chacun est perpendiculaire aux deux autres; il s'agit de les évaluer. On a d'abord

$$MN = mn = Om.d\alpha = r\cos\gamma d\alpha.$$

Ensuite les angles mOn et MON étant infiniment petits, les projections On et ON ne diffèrent de Om et OM que par des infiniment petits du second ordre; les triangles OnN et OmM peuvent donc être considérés comme égaux. Ainsi l'on a

$$ON = OM = r; \quad \text{angle } NOn = MOm = \gamma;$$

$$\text{angle } NOQ = d\gamma; \qquad NQ = ON.d\gamma = rd\gamma;$$

et par suite

$$OQ = ON = r, \quad \text{et} \quad QM' = OM' - r = dr.$$

Il ne reste plus qu'à substituer ces valeurs dans l'expression de MM'. On obtient

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{NQ}^2 + \overline{QM'}^2,$$

ou

$$ds^2 = r^2\cos^2\gamma d\alpha^2 + r^2 d\gamma^2 + dr^2,$$

d'où la vitesse cherchée :

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{r^2\cos^2\gamma\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

Remarques. 1° On arrive au même résultat par une transformation auxiliaire des coordonnées du point M. Prenant OL pour

l'axe des x, Ox pour celui des z et l'axe des y perpendiculaire à Ox dans le plan mOL, on a

$$x = Om \cos\alpha = r\cos\gamma\cos\alpha,$$

$$y = Om \sin\alpha = r\cos\gamma\sin\alpha,$$

$$z = r\sin\gamma.$$

On différentie et substitue dans la formule

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

2° Si l'on fait $\gamma = \text{const} = 0$, la trajectoire est plane, et l'on retrouve $ds^2 = r^2 d\alpha^2 + dr^2$.

§ 7.

DU MOUVEMENT D'UN POINT RELATIVEMENT A UN SYSTÈME DE COMPARAISON INVARIABLE EN MOUVEMENT. COMPOSITION DES VITESSES ET DES CHEMINS ÉLÉMENTAIRES.

24. Mouvement relatif. — Un point M ayant un mouvement quelconque dans l'espace, concevons qu'un système de comparaison de figure constante, formé, par exemple, des trois arêtes d'un angle trièdre invariable, se meuve aussi d'une manière quelconque, et supposons qu'un observateur, entraîné à son insu dans le mouvement du système de ces axes, les considère comme fixes. (C'est ce qui nous arrive continuellement dans les questions de mécanique, où nous faisons abstraction du mouvement de la terre.) Cet observateur attribuera au point M un mouvement différent de celui que ce mobile possède réellement. Ce mouvement s'appelle *mouvement apparent* ou *relatif*, dans le système de comparaison.

En résumé, *le mouvement relatif d'un point dans un système de comparaison qui est lui-même en mouvement est le mouvement absolu qu'aurait ce point si, le système de comparaison devenant fixe, les distances du mobile aux points de ce système étaient aux instants quelconques qui se succèdent les mêmes qu'elles sont pendant que le système se meut.*

25. **Trajectoire relative.** — *Connaissant le mouvement absolu d'un point et le mouvement absolu du système de comparaison, trouver la trajectoire du mouvement du point relativement à ce système et les positions que ce mobile y occupe à des instants désignés.*

Solution graphique. — Soient M_1, M_2, M_3... les positions successives du point M, et soient

$$O_1x_1y_1z_1, \quad O_2x_2y_2z_2, \quad O_3x_3y_3z_3, \ldots$$

les positions correspondantes du système de comparaison à la fin des temps t_1, t_2, t_3... Il suffit de reporter dans l'une des positions de ce système, la première par exemple, le point M avec les coordonnées relatives qu'il a successivement. On construit ainsi la trajectoire relative M_1, m_2, m_3... dont les points M_1, m_2, m_3... correspondent aux temps t_1, t_2, t_3...

Exemple. Le système de comparaison tourne uniformément autour d'un axe, et le point M a son mouvement rectiligne et uniforme dans un plan perpendiculaire à l'axe. Prenons ce plan pour celui de la figure 7. Soit O sa rencontre avec l'axe de rotation. Soient M, M', M''... des positions successives et équidistantes du mobile. Prenons pour axes du système de comparaison l'axe de rotation projeté en O et le rayon OM qui, à l'instant initial, passe par la première position considérée du mobile. Pendant que celui-ci se transporte en M', en M''..., le rayon d'abord en OM ou OA se transporte en OA', OA'', par-

courant dans des temps égaux des angles égaux, puisque, par hypothèse, le système de comparaison tourne uniformément. Cela posé, pour avoir un point de la trajectoire relative, telle qu'elle serait pour un observateur qui, entraîné dans ce mouvement de rotation, considérerait le rayon OA comme fixe, il suffit, par exemple, de trouver un point m' qui soit situé par rapport à OA comme M′ est situé par rapport à OA′; pour cela, on décrit par le point M′ un arc de cercle $P'm'$ autour de O, puis on fait $p'm' = P'M'$. De même on décrit par M″ l'arc $P''m''$, et l'on fait $p''m'' = P''M''$. Ainsi de suite.

Solution analytique du même problème en général. — Soient x, y, z, les coordonnées variables en fonctions du temps du point mobile M rapporté à trois axes fixes Ox, Oy, Oz, supposés rectangulaires. Soient a, b, c les coordonnées variables relativement à ces axes fixes, d'un point O′, origine mobile d'un système de comparaison formé de trois axes O′x′, O′y′, O′z′, rectangulaires dont les neuf angles avec les trois premiers axes sont comme les coordonnées a, b, c, des fonctions du temps déduites des données du problème, c'est-à-dire de la connaissance du mouvement du système de comparaison. Les coordonnées du point M relativement aux axes de ce système sont désignées par x′, y′, z′. Ce sont les projections rectangulaires sur ces axes O′x′, O′y′, O′z′ de la distance O′M, laquelle ferme le contour polygonal dont les côtés sont $x - a$, $y - b$, $z - c$. On a donc

$$x' = (x-a)\cos(x, x') + (y-b)\cos(y, x') + (z-c)\cos(z, x'),$$
$$y' = (x-a)\cos(x, y') + (y-b)\cos(y, y') + (z-c)\cos(z, y'),$$
$$z' = (x-a)\cos(x, z') + (y-b)\cos(y, z') + (z-c)\cos(z, z').$$

Ces équations, qui sont celles du mouvement relatif, sont les formules ordinaires de la transformation des coordonnées, avec cette différence que les coordonnées a, b, c et les neuf angles indiqués sont variables. En éliminant le temps, on obtiendrait les

deux équations qui définiraient analytiquement la trajectoire relative.

Cas particulier où les axes de comparaison se meuvent parallèlement à eux-mêmes, et d'une manière d'ailleurs quelconque. On peut les prendre parallèles aux axes fixes. Ici, comme précédemment, la figure M_1, m_2, m_3... de la trajectoire relative s'obtient en ramenant le système de comparaison de chacune de ses positions successives à l'une d'elles, en supposant que dans ce transport il entraîne avec lui la position relative correspondante du point mobile.

Les équations ci-dessus deviennent simplement

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c.$$

Cas plus particulier où le point observé est immobile, les lignes du système de comparaison se mouvant parallèlement à elles-mêmes. On peut supposer le point immobile à l'origine des axes fixes. Ainsi, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et les équations précédentes se réduisent à $x' = -a$, $y' = -b$, $z' = -c$; la trajectoire relative est donc, par rapport aux axes mobiles, diamétralement symétrique à celle que décrit dans l'espace l'origine de ces axes mobiles par rapport aux axes fixes. Si cette dernière trajectoire est plane, il en est de même de l'autre, et elles sont superposables par simple rotation de l'une d'elles dans leur plan commun. Si les deux courbes ne sont pas planes et qu'on en fasse tourner une, de deux angles droits, autour de l'origine fixe et parallèlement à un plan passant par cette origine, elles deviennent symétriques par rapport à ce plan.

26. Composition des mouvements. — On résoudrait par des moyens analogues le problème qui consisterait à *trouver le mouvement absolu d'un point, connaissant et son mouvement relatif pour un système de comparaison et le mouvement de ce système de figure invariable.* La solution graphique de ce problème se ré-

duirait, 1° à figurer un nombre suffisant de positions absolues du système de comparaison

$$O'_1x'_1y'_1z'_1, \quad O'_2x'_2y'_2z'_2, \quad O'_3x'_3y'_3z'_3\ldots;$$

2° à y représenter les positions relatives, aux mêmes instants, du point mobile dont il s'agit : la ligne joignant les points M_1, M_2, M_3... ainsi obtenus serait la trajectoire absolue de ce mobile.

La solution analytique serait exprimée par les équations

$$x = a + x'\cos(x', x) + y'\cos(y', x) + z'\cos(z', x),$$

$$y = b + x'\cos(x', y) + y'\cos(y', y) + z'\cos(z', y),$$

$$z = c + x'\cos(x', z) + y'\cos(y', z) + z'\cos(z', z).$$

qui supposent,

1° Que les trois axes fixes auxquels se rapportent les coordonnées x, y et z, définissant la position du mobile à la fin du temps t, sont rectangulaires;

2° Que les coordonnées a, b et c de l'origine mobile O' du système de comparaison, et les angles des axes rectangulaires O'x', O'y' et O'z' avec les axes fixes sont des fonctions du temps déduites de la loi donnée du mouvement du système de comparaison;

3° Qu'il en est de même des coordonnées x', y' et z' liées au temps, en vertu de la loi donnée du mouvement relatif du mobile.

Cette question est comprise dans celles qui sont désignées sous le nom de *composition des mouvements*, et il est d'usage de dire que le mouvement absolu d'un corps se compose de son mouvement relatif dans un système de comparaison, et du mouvement absolu de ce système. On remarquera que, dans les explications qui précèdent, il s'agit seulement du mouvement d'un point et du mouvement d'un système géométrique auquel on le rapporte.

Après nous être occupés de la trajectoire du mouvement relatif d'un point, nous allons considérer sa vitesse.

27. Vitesse relative. — La vitesse relative, qui est celle du mouvement relatif, est en général différente en intensité et en direction de la vitesse absolue. Cette considération conduit à la question suivante :

Trouver les relations entre la vitesse relative, la vitesse absolue et le mouvement du système de comparaison.

Soit, à un instant déterminé, A (fig. 8) la position du point mobile, et soit $AV = v$ une droite représentant en direction et en grandeur sa vitesse absolue.

Soit $AE = v_e$ une autre droite représentant de même la vitesse avec laquelle le point A, considéré comme point géométrique lié au système de comparaison, est entraîné dans le mouvement de ce système ; cette vitesse est appelée *vitesse d'entraînement* du mobile à l'instant de son passage en A, dénomination expressive que rappelle la notation v_e ; elle diffère en général de celle d'un autre point pris à volonté et lié au système de comparaison, sauf le cas où le mouvement de celui-ci est tel que tous ses points décrivent des courbes égales et parallèles, et où par conséquent toutes les droites joignant ses points se déplacent parallèlement à elles-mêmes.

Dans un temps infiniment petit dt le mobile principal se transporte en M sur la tangente AV de sa trajectoire, à une distance $AM = v dt$, tandis que le point géométrique A, lié au système de comparaison, est entraîné en A′ à une distance $AA' = v_e dt$. Donc, l'observateur qui, emporté avec ce système, considérerait le point géométrique A comme fixe, pendant son transport en A′, attribuerait au mobile principal un mouvement en vertu duquel celui-ci parcourrait un espace infiniment petit, égal à A′M, pendant le temps dt. Donc, si l'on désigne par v_r la vitesse relative de ce mobile à l'instant de son passage en A, on a $A'M = v_r dt$. Les côtés du triangle AMA′, égaux respecti-

vement à $v\,dt$, $v_e\,dt$ et $v_r\,dt$, sont donc proportionnels aux vitesses v, v_e, v_r, ce qui détermine l'intensité de la vitesse relative $v_r = \mathbf{EV}$.

Quant à sa direction, c'est la limite des positions de la droite **A'M** à mesure qu'on fait décroître le temps dt. C'est donc une parallèle à **EV** menée par **A**.

En achevant le parallélogramme **AEVR**, on conclut :

THÉORÈME. *La vitesse absolue est représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallélogramme dont deux côtés contigus représentent de même, l'un la vitesse d'entraînement, l'autre la vitesse relative.* En d'autres termes, *la vitesse absolue est la droite* **AV** *qui, partant du mobile, aboutit à l'extrémité d'une ligne brisée* **AEV** *ou* **ARV**, *formée de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative, l'une portée parallèlement à elle-même au bout de l'autre.*

28. Composition de deux vitesses. — On voit que la vitesse absolue reste la même, lorsque l'on échange entre elles la vitesse d'entraînement et la vitesse relative. C'est pour cela que ces deux vitesses, dont les grandeurs et les directions contribuent géométriquement de la même manière à produire la vitesse absolue, s'appellent les *vitesses composantes,* ou simplement les *composantes* de la vitesse absolue; et cette dernière, considérée en ses rapports avec les deux autres, s'appelle leur *résultante.* L'opération par laquelle on trouve la vitesse résultante au moyen de ses composantes, s'appelle la *composition des vitesses.*

REMARQUE. On peut se proposer sur les trois vitesses v, v_e et v_r et sur les angles qu'elles forment entre elles tous les problèmes de la trigonométrie rectiligne, et les résoudre, soit par les procédés graphiques, soit par le calcul.

Si, par exemple, on connaît la vitesse absolue $v = \mathbf{AV}$, la vitesse d'entraînement $v_e = \mathbf{AE}$, et l'angle qu'elles forment, on trouve la vitesse relative $v_r = \mathbf{AR}$, soit en achevant le triangle **AVE** et menant **AR** parallèle et égal à **EV**, soit en construisant

AR comme diagonale du parallélogramme dont les deux côtés sont **AV**, vitesse absolue, et **Ae** vitesse égale et opposée à la vitesse d'entraînement **AE**. Pour calculer une des trois vitesses en fonction des deux autres et de leur angle, on a

$$v^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(v_e, v_r).$$

$$v_r^2 = v^2 + v_e^2 - 2vv_e \cos(v, v_e),$$

$$v_e^2 = v^2 + v_r^2 - 2vv_r \cos(v, v_r).$$

29. Cas particulier. — Lorsque la vitesse d'entraînement et la vitesse relative coïncident sur une même droite, la vitesse absolue est égale à leur somme ou à leur différence, selon qu'elles sont de même sens ou de sens contraires; et dans ce dernier cas elle a le sens de la plus grande. En d'autres termes, elle est égale à leur somme algébrique, chaque vitesse ayant le signe qui convient au sens de sa direction.

30. Exemples. — 1° Un corps se meut verticalement avec une vitesse constante u (fig. 9); un système invariable se meut horizontalement et uniformément avec une vitesse u': quelle est, relativement à ce système, la vitesse v du premier corps? On l'obtient en achevant le parallélogramme dont u est la diagonale, et u' un des côtés, ou bien elle est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont u et $-u'$.

2° Un cylindre creux ayant un mouvement de rotation connu autour de son axe projeté en **O** (fig. 7), on suppose qu'un point mobile y pénètre en **A** avec une vitesse absolue représentée en grandeur et en direction par **AV**, tandis que la vitesse du point **A** considéré comme appartenant au cylindre est représentée par la tangente AV_e. En achevant le parallélogramme AV_eVV_r, on obtient la droite AV_r représentant la vitesse relative avec laquelle le mobile entre au premier instant dans le cylindre ; sa direction est celle qu'il faudrait donner au premier

élément d'un tuyau droit ou courbe qui adhérerait au cylindre, et dans lequel on voudrait que le mobile s'introduisît sans choc.

31. Composition d'un nombre quelconque de vitesses. — Un point ayant une certaine vitesse relativement à un système de comparaison, celui-ci peut avoir lui-même un certain mouvement relativement à un autre système également mobile : c'est ainsi qu'on arrive à considérer une vitesse comme la résultante d'autant de composantes qu'on veut.

Pour le faire comprendre, posons un exemple de trois vitesses composantes. Le centre O de la terre (fig. 10), tourne autour du soleil dans le plan de l'écliptique avec une vitesse v'; c'est ce qui constitue le mouvement annuel du globe. L'axe des pôles ON, emporté avec le centre, se meut parallèlement à lui-même, et si l'on considère un système de comparaison formé de cet axe mobile et de l'intersection OE des plans de l'équateur et de l'écliptique, laquelle intersection se transporte aussi parallèlement à elle-même avec la vitesse v', un point A de la surface de la terre a, relativement à ce système, un mouvement uniforme de rotation, ce qui constitue le mouvement diurne du globe. Soit v'' la vitesse relative due à cette rotation, vitesse qui dépend de la latitude du point dont il s'agit. Il s'ensuit que, relativement au soleil et à l'écliptique, la vitesse u de ce point est la résultante de v', vitesse d'entraînement, et de v'', vitesse relative.

Supposons maintenant qu'un boulet soit lancé, du point dont nous venons de parler, avec une vitesse apparente v'''. Sa vitesse absolue v, ou plutôt sa vitesse relativement au soleil et à l'écliptique sera la résultante de u, vitesse d'entraînement, et de v''', vitesse relative. Si l'on connaît les vitesses v', v'' et v''', on en conclura aisément V : en construisant une ligne brisée ABCD, formée de AB, représentant v' en intensité et en direction; de BC, égale et parallèle à v'', et de CD, égale et parallèle à v''', on aura d'abord $AC = u$, et ensuite AD, résultante de u, et de v''', égale à v.

En généralisant ces considérations, on voit ce qu'il faut entendre par la *composition d'un nombre quelconque de vitesses,* ou par une *vitesse résultante de plusieurs autres.* L'une d'elles étant prise pour vitesse d'entraînement et une autre pour vitesse relative, on en conclut une vitesse absolue qui, étant prise pour nouvelle vitesse d'entraînement et combinée avec la troisième vitesse composante, donne une nouvelle vitesse absolue; celle-ci, avec une quatrième vitesse composante, donne encore une vitesse absolue qui est la résultante des quatre composantes employées; ainsi de suite. Il est facile de reconnaître d'après cela, et par suite du numéro 27, la proposition générale que voici :

THÉORÈME. *La résultante d'un nombre quelconque de vitesses* **AB, AC, AD, ... AL** *est en grandeur et en direction une droite* AL_1 *qui, partant de leur origine commune* **A**, *aboutit à l'extrémité d'une ligne brisée* $ABC_1D_1 \ldots L_1$ *formée de l'une des vitesses, par exemple* **AB**, *et de toutes les autres transportées en* BC_1, $C_1D_1, \ldots K_1L_1$ *parallèlement à elles-mêmes, et disposées bout à bout, en conservant les mêmes longueurs et les mêmes sens.* Cette brisée s'appelle *polygone des vitesses.*

Par exemple, la vitesse v d'un point dans l'espace est la résultante des vitesses de ses projections coordonnées sur trois axes concourants; et dans le cas traité au numéro 23, la vitesse v du point **M** dans l'espace est la résultante, 1° de la vitesse relative $\frac{dr}{dt}$ sur le rayon vecteur **OM**, 2° de la vitesse d'entraînement $r \cos\gamma \frac{d\alpha}{dt}$ du point considéré comme instantanément fixe en **M** sur le plan **MOm**, pendant que ce plan tourne autour de **Oz** avec la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$, et 3° de la vitesse d'entraînement $-r\frac{d\gamma}{dt}$ de ce point, considéré comme fixe sur le rayon

vecteur OM, pendant que celui-ci se rapproche de Ox avec la vitesse angulaire $-\frac{d\gamma}{dt}$.

32. Remarque sur la simultanéité des vitesses composantes, et de la vitesse résultante. — On dit quelquefois qu'un point est animé simultanément de plusieurs vitesses ou possède à la fois plusieurs mouvements. C'est une locution abrégée qui ne peut être entendue dans le sens rigoureux, car, à un certain instant, un point n'a réellement qu'un mouvement. C'est dans la considération des mouvements relatifs qu'on trouve la véritable interprétation de cette manière de parler. Ainsi, dans l'exemple du numéro 35, il ne serait pas exact de dire que ce boulet tourne autour du soleil parallèlement à l'écliptique, en même temps qu'il tourne autour de l'axe des pôles, et en même temps encore qu'il quitte son point de départ dans la direction de la bouche à feu. Il aurait le premier mouvement s'il était en repos sur la terre et que celle-ci en mouvement autour du soleil ne tournât pas autour de son axe; il aurait le second s'il était immobile sur la terre et que celle-ci tournât autour de son axe devenu fixe; il aurait le troisième si la terre était tout à fait immobile.

33. Projection du polygone des vitesses. — On sait que la propriété caractéristique d'une droite telle que AL_1 qui ferme un contour polygonal $ABC_1D_1\ldots L_1$ est que la projection sur un axe quelconque de cette droite prise dans le sens AL_1 est égale à la somme algébrique des projections des côtés pris dans le sens suivant lequel ils se décrivent à partir de A. Ainsi, V étant la résultante de plusieurs vitesses v', v'', v''' attribuées à un même point, on a pour un axe Ox et pour un plan directeur, l'un et l'autre quelconques, la formule

$$V_x = v_x' + v_x'' + v_x''' + \ldots \quad \text{ou} \quad V_x = \Sigma v_x,$$

chaque projection prise avec le signe qui convient à son sens.

Si les projections sont rectangulaires, la formule précédente devient

$$V\cos(V, x) = \Sigma\, v\cos(v, x);$$

chaque vitesse est positive, et le cosinus qui la multiplie est celui de l'angle aigu ou obtus que la direction de la vitesse fait avec la direction positive de l'axe Ox.

Il s'ensuit que la résultante AL, obtenue par la construction du polygone des vitesses, ne dépend nullement de l'ordre dans lequel on dispose les composantes, et que par conséquent, dans la composition de vitesses quelconques, on peut, sans rien changer à la résultante, prendre celle des composantes qu'on voudra pour première vitesse d'entraînement, et mettre à la suite les autres vitesses dans un ordre quelconque.

Si deux vitesses composantes étaient égales et de directions opposées, elles seraient sans influence sur la résultante, ou, comme on le dit, elles se détruiraient.

34. Décomposition des vitesses. — De l'équation

$$V_x = v'_x + v''_x + v_x''' + \ldots$$

on conclut

$$v_x' = V_x - v_x'' - v_x''' - \ldots$$

c'est-à-dire que l'une des vitesses composantes peut s'obtenir en composant la résultante avec les autres composantes prises en sens contraires de leurs directions. Par exemple, dans le cas particulier du numéro 31, la vitesse relative AR est égale à la résultante de la vitesse absolue AV et d'une vitesse Ae égale et opposée à la vitesse d'entraînement AE, ce qui est évident à la simple inspection de la figure.

Il suit de là qu'en général *on ne change pas le mouvement d'un point relativement à un système de comparaison, si on imprime par la pensée à celui-ci un second mouvement qui se combine avec celui qu'il possède, pourvu que l'on compose la vitesse absolue du point avec une vitesse égale à la nouvelle composante qu'a reçue sa vitesse d'entraînement.* Le cas le plus simple où cette règle s'applique est celui où l'on réduit à zéro la vitesse d'entraînement primitive prise négativement.

35. Composition des chemins élémentaires d'un point. — Il arrive souvent qu'au lieu de dire qu'un point a une vitesse v dans une certaine direction, ce qui a une signification précise, on dit qu'il parcourt dans un temps dt un espace infiniment petit ou chemin élémentaire ds égal à $v\,dt$, ce qui suppose qu'on fait abstraction de la courbure de la trajectoire et de la variation de la vitesse, comme on peut le faire quand on n'a pour objet que de comparer entre elles des vitesses prises à de certains instants. A ce point de vue, en nous reportant à la question du numéro 29, nous remarquerons que le chemin élémentaire absolu AM ou $v\,dt$, peut être considéré comme la diagonale du parallélogramme dont les côtés contigus sont le chemin AA' ou $v_e\,dt$, dû au mouvement d'entraînement, et le chemin A'M ou $v_r\,dt$, dû au mouvement relatif.

En général, quand la vitesse V d'un point se compose de plusieurs vitesses v', v'', v'''..., on peut exprimer ce fait en disant que le chemin élémentaire $V\,dt$ de ce point, pendant le temps dt, est la droite qui ferme le contour polygonal formé de lignes égales et parallèles en même sens aux chemins $v'\,dt$, $v''\,dt$, $v'''\,dt$... que le point parcourrait en vertu des vitesses composantes prises isolément. C'est ce qu'on peut exprimer par la formule suivante, en supposant dans l'espace un axe de projection Ox et un plan directeur, l'un et l'autre quelconques :

$$V_x\,dt = \Sigma\, v_x\,dt.$$

36. Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes. — Si une courbe est considérée comme décrite par un point dont la vitesse soit la résultante de plusieurs autres, il suffit de connaître les directions et les rapports des vitesses composantes pour en conclure la direction de la tangente. C'est le principe de la méthode de Roberval, géomètre français du dix-septième siècle.

Exemples. — I. L'ellipse dont on a un point M (fig. 11) et les deux foyers F et f, étant supposée décrite par une pointe qui glisse le long du rayon vecteur FM tournant autour de F, soit MV la vitesse relative suivant le rayon ; la vitesse absolue est l'hypoténuse inconnue MT du triangle rectangle MVT, dont le côté VT serait égal à la vitesse d'entraînement du point M, en vertu de la rotation du rayon vecteur FM. Mais on peut considérer aussi la courbe comme décrite par une pointe glissant sur Mf avec la vitesse Mv égale à MV, puisque le second rayon vecteur décroît autant que l'autre augmente dans le même temps. Donc, l'extrémité de la droite représentant la vitesse absolue de M est en T, point de rencontre des deux perpendiculaires VT et vT aux rayons vecteurs.

Les deux triangles rectangles MVT, MvT étant égaux, il s'ensuit que la tangente MT à l'ellipse est bissectrice de l'angle vMV formé par un rayon vecteur et le prolongement de l'autre ; la normale MN à l'ellipse est donc bissectrice de l'angle FMf des deux rayons vecteurs.

II. La même méthode s'appliquerait à la courbe définie par la condition que, les deux points A et B (fig. 12) étant fixes, les deux rayons vecteurs AM et BM sont dans un rapport constant. La courbe peut être supposée décrite par une pointe traçante qui se meut de M vers A sur le rayon vecteur AM, avec une vitesse représentée par la longueur MA, tandis que ce même rayon vecteur tourne autour de A. Mais la même courbe peut être simultanément décrite par une pointe traçante qui se mouvrait sur le rayon BM avec une vitesse représentée par MB

(puisque les deux vitesses relatives sur les deux rayons vecteurs sont proportionnelles aux longueurs de ces rayons, et que l'une d'elles a été, pour simplifier la figure, représentée par **MA**). En raisonnant comme dans l'exemple précédent, nous voyons que la vitesse absolue du point décrivant est l'hypoténuse commune des deux triangles rectangles **MAT** et **MBT**; donc, le point de la tangente est à l'intersection des deux perpendiculaires **AT** et **ET** (*).

III. On trace d'une manière analogue la tangente **MT** (fig. 13) à une section conique dont on a un foyer **F**, une directrice **AB** et le point **M**. Le rapport des distances **MN** et **MF** du point **M** à la directrice et au foyer étant constant, on voit facilement que la direction de la vitesse ou de la tangente en **M** passe en **T**, point de rencontre de la directrice **AB** et de la perpendiculaire **FT**, menée par le foyer au rayon vecteur.

Remarque. Certains auteurs, en appliquant la méthode de Roberval à l'ellipse, ont cru, par inadvertance, que la vitesse du

(*) On peut être curieux de vérifier que la courbe définie dans l'exemple II est une circonférence de cercle, et que la tangente **MT** est perpendiculaire au rayon **MO** (fig. 12).

1° Soit **BQ** perpendiculaire à **AB**, le point **Q** étant sur la courbe dont il s'agit. Menons **QO** perpendiculaire à **AQ** et décrivons la circonférence dont le centre est **O** et un rayon **OQ**. Le point **M** quelconque de cette circonférence satisfait à la propriété énoncée. En effet, les deux triangles rectangles et semblables **QOA** et **QOB** donnent $\frac{OQ}{OA} = \frac{OB}{OQ}$. Or, **OQ**=**OM**; donc, $\frac{OM}{OA} = \frac{OB}{OM}$. Donc, les deux triangles **MOA** et **MOB** ayant un même angle compris entre côtés proportionnels, sont semblables. Donc,

$$\frac{BM}{MA} = \frac{OM}{OA} = \frac{OQ}{OA} = \frac{BQ}{QA},$$

rapport constant, quelque part que soit le point **M** sur la circonférence.

2° Démontrons que la droite **MT** supposée perpendiculaire à **OM**, et les droites **AT** et **BT**, respectivement perpendiculaires à **AM** et à **BM**, concou-

point décrivant était la résultante des deux vitesses relatives égales **MV** et **Mv**, dirigées suivant les deux rayons vecteurs. Comme ils n'ont tiré de cette supposition fausse qu'une conséquence vraie, savoir, que la tangente **MT** à l'ellipse divise l'angle **VMv** en deux parties égales, ils ont pu ne pas s'apercevoir de leur erreur, qui depuis longtemps a été signalée par M. Duhamel. Ils l'auraient nécessairement reconnue s'ils avaient considéré les exemples II et III. Ceci nous donne occasion d'insister sur ce point : que la saine théorie de la composition de deux vitesses exige que l'une soit la vitesse relative du point considéré, dans un système de comparaison de figure invariable et mobile dans l'espace, et que l'autre soit la vitesse d'entraînement de ce point hypothétiquement attaché au même système de comparaison.

rent en un même point **T**. Rapportons ces trois droites aux deux axes rectangulaires **Ox** et **Oy**. Soient x' et y' les coordonnées **OP** et **PM** du point **M**, et posons $\mathbf{OA} = a$, $\mathbf{OB} = b$, et $\mathbf{OQ} = r$, en remarquant que le triangle rectangle **QOA** donne $r^2 = ab$.

L'équation de **MT** est

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x'), \qquad [1].$$

celle de **BT**

$$y = \frac{b - x'}{y'}(x - b), \qquad [2].$$

celle de **AT**

$$y = \frac{a - x'}{y'}(x - a). \qquad [3].$$

L'élimination de y, soit entre les équations [1] et [2], soit entre [1] et [3], eu égard à la double relation $y'^2 + x'^2 = r^2 = ab$, donne dans les deux cas la même valeur $x = a + b - x'$, ce qui prouve que l'intersection de **BT** et de **MT** coïncide avec celle de **AT** et de **MT**.

Nous verrons bientôt (54 et suiv.) d'autres exemples de la détermination d'une tangente, fondée sur ce que sa direction est celle de la vitesse du point qui décrit la courbe, lorsque celle-ci est susceptible d'une génération mécanique.

CHAPITRE II.

DES DIVERS MOUVEMENTS D'UN CORPS SOLIDE OU SYSTÈME INVARIABLE.

§ 1.

GÉNÉRALITÉS SUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

37. Relation des vitesses de deux points dont la distance est constante. — Un système invariable, que l'on nomme souvent, pour abréger, un solide, est un ensemble de points dont les distances mutuelles restent les mêmes, quel que soit leur mouvement. Une loi générale qui lie entre elles les vitesses de ces différents points est celle que nous allons signaler.

Soient, à un certain instant, A et A′ (fig. 14) les positions de deux de ces points situés à une distance finie l'un de l'autre et ayant actuellement les vitesses v et v'. Pendant le temps dt ils se transportent en B et B′, à des distances infiniment petites, $v\,dt$ et $v'\,dt$, de A et de A′. Projetons rectangulairement la droite BB′, égale à AA′, sur la direction de cette dernière, en bb′. L'angle de BB′ avec AA′ étant infiniment petit, la différence entre les longueurs BB′ et bb′ est infiniment petite par rapport à la plus grande des distances AA′ et BB′. On doit la négliger auprès de celles-ci et poser $bb' = AA'$, d'où $Ab = A'b'$, ou $\frac{Ab}{dt} = \frac{A'b'}{dt}$.

Or, ces deux dernières quantités sont les vitesses des projections rectangulaires sur AA′ des deux points mobiles dont il s'agit. Ce sont aussi les projections des vitesses v et v' (19). Donc,

THÉORÈME. *Les vitesses de deux points dont la distance est invariable ont à chaque instant leurs projections rectangulaires égales sur la droite qui, au même instant, joint ces deux points.*

38. Cas particulier. — Si la droite AA′ est normale à la trajectoire de l'un des points, la vitesse de ce point a sa projection nulle sur cette droite, et, quant à l'autre point, il faut de deux choses l'une : que sa trajectoire soit également perpendiculaire à la droite AA′, ou que, si elle ne l'est pas, la vitesse de ce second point soit actuellement nulle. Exemple : une droite MM′ (fig. 15) de longueur invariable se meut, l'extrémité M restant sur la droite AB, et l'extrémité M′ sur AA′ perpendiculaire à AB : lorsque la première passe en A avec une vitesse quelconque, la seconde est en A′, non en repos, mais avec une vitesse nulle.

39. L'étude du mouvement d'un système invariable se réduit à celle du mouvement d'un triangle. — Il est facile, en effet, de reconnaître que, si l'on assigne à trois points quelconques non en ligne droite d'un système invariable un des mouvements qu'ils peuvent prendre, le mouvement de chacun des autres points du système est déterminé comme une conséquence de cette hypothèse.

§ 2.

CLASSIFICATION DES MOUVEMENTS CONTINUS D'UN SYSTÈME INVARIABLE. RELATIONS DES VITESSES ENTRE ELLES DANS CHAQUE CAS.

40. Divers mouvements continus d'un système invariable. — On peut distinguer dans le mouvement d'un solide cinq cas qu'il est utile d'étudier séparément, savoir :

1° Mouvement simple de translation;

2° Mouvement simple de rotation autour d'un axe fixe;

3° Mouvement quelconque parallèle à un plan fixe ;

4° Mouvement quelconque de rotation autour d'un point fixe ;

5° Mouvement quelconque composé d'une translation et d'une rotation.

Nous allons les caractériser et examiner dans chaque cas la loi qui lie entre elles les vitesses des différents points du système.

MOUVEMENT SIMPLE DE TRANSLATION.

41. Translation rectiligne ou curviligne. — Dans ce cas, toutes les droites qu'on peut imaginer entre les points du système se déplacent, en restant parallèles à leurs situations initiales. Il s'ensuit que tous les déplacements simultanés ont des cordes parallèles et égales, et que tous les points ont, aussi longtemps que dure la translation effective, des vitesses à chaque instant égales, parallèles et de même sens, pouvant d'ailleurs varier ensemble, d'un instant à l'autre, d'intensité et de direction.

Dans le cas particulier où les vitesses égales restent parallèles à une direction constante, le système a un mouvement de *translation rectiligne*, sinon la translation est *curviligne*. La translation rectiligne peut être uniforme ou variée. La translation curviligne peut être circulaire : tous les points du système décrivent alors des arcs de cercle égaux dans des plans parallèles.

Il suffit que trois points, non en ligne droite, d'un système invariable, aient un mouvement commun de translation pour qu'il en soit de même de tout le système (39).

MOUVEMENT SIMPLE DE ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE.

42. Rotation simple. Déplacement, vitesse, accélération angulaires. — Lorsque trois points, non en ligne droite, d'un système invariable, conservent sans changement leurs distances à deux points fixes de l'espace, il en est de même de tous les

autres points du système, et l'on dit qu'*il tourne autour de l'axe* fixe déterminé par les deux points fixes, ou qu'il a un *mouvement de rotation autour de cet axe.*

Dans ce cas, tous les points du système se meuvent dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation; ils y décrivent en un même temps des arcs semblables, c'est-à-dire d'un même nombre de degrés, et par conséquent proportionnels aux distances de ces points à l'axe fixe. Le rapport de chacun de ces arcs à son rayon s'appelle le *déplacement angulaire* du système dans le temps dont il s'agit. Il est numériquement égal à l'arc décrit pendant ce même temps par un point invariablement lié au système et situé à l'unité de distance de l'axe.

Les vitesses des différents points du système, à un même instant, sont par cette raison proportionnelles aux distances de ces points à l'axe de rotation. Le rapport de chacune de ces vitesses au rayon de l'arc décrit par le point qui la possède s'appelle la *vitesse angulaire* du système, à l'instant dont il s'agit. Ce rapport est numériquement égal à la *vitesse linéaire* de tout point lié invariablement au système et situé à l'unité de distance de l'axe. Il est d'ailleurs indépendant (26) du choix de l'unité linéaire.

La vitesse angulaire peut être constante, et la rotation est alors dite *uniforme;* si la vitesse angulaire w est variable, la quantité $\frac{dw}{dt}$, qui correspond à un instant quelconque et peut être constante ou variable, est appelée l'*accélération angulaire du système* à cet instant.

MOUVEMENT QUELCONQUE PARALLÈLE A UN PLAN FIXE.

43. Roulement cylindrique. — On se fait une idée nette du mouvement d'un solide parallèlement à un plan, en le considérant comme un mouvement de roulement cylindrique. Imaginons donc qu'un système invariable soit invariablement

attaché à une surface cylindrique à base quelconque, qui roule sans glisser (*) sur une autre surface cylindrique supposée fixe et dont les génératrices rectilignes sont parallèles à celles de la première. Chaque point du système décrit une courbe plane dont le plan est perpendiculaire aux génératrices des cylindres. Si ces deux cylindres sont de révolution et si le point décrivant est sur la surface cylindrique mobile, la courbe plane qu'il décrit se nomme *épicycloïde*. Elle est une simple cycloïde lorsque, le cylindre mobile étant à base circulaire, le cylindre fixe est remplacé par un plan. Si la surface cylindrique mobile est remplacée par un plan, la courbe plane décrite par un point du système, situé dans ce plan, est une développante de la section droite du cylindre fixe. En général, ce genre de mouvement se nomme mouvement *épicycloïdal plan* ou *roulement cylindrique*.

Quelles que soient les sections droites des cylindres, la relation qui lie entre elles les vitesses des différents points du système mobile, à un même instant, est facile à apercevoir. En effet, remplaçons les cylindres par des prismes inscrits à faces très-étroites et égales (pour plus de simplicité). Les courbes décrites dans ce cas par les points du système en mouvement, pendant un temps très-court, sont des arcs circulaires dont les plans sont perpendiculaires à l'arête actuellement commune aux deux prismes et dont les centres sont sur cette arête ; et les vitesses de ces divers points sont proportionnelles aux distances des points à cette même arête. Ces deux propriétés, étant indépendantes de la largeur des faces des prismes, subsistent par conséquent à la limite, c'est-à-dire dans le cas des cylindres. Donc, dans le

(*) On comprend que, par *roulement sans glissement* d'une surface cylindrique sur une autre qu'elle touche suivant une génératrice, il faut entendre que, si par l'un des points de contact on mène un plan perpendiculaire à la génératrice commune, les deux sections droites que ce plan détermine dans les deux surfaces restent constamment tangentes l'une à l'autre pendant leur mouvement relatif et, de plus, le point de contact se déplace simultanément de longueurs égales sur les deux courbes.

mouvement épicycloïdal plan, les directions et les rapports des vitesses sont à chaque instant les mêmes que si l'arête de contact des deux cylindres était fixe à partir de cet instant. C'est ce qu'on exprime d'une manière abrégée, en disant que le *mouvement élémentaire du système* est une rotation autour de la génératrice de contact, ou encore, que cette génératrice est un *axe instantané de rotation*.

Remarques. — 1° En réalité, la génératrice de contact des deux cylindres, à un instant déterminé, n'est pas fixe. Les points du cylindre mobile qui, à cet instant, sont sur le cylindre fixe n'y restent pas pendant un temps fini, quelque petit qu'il soit; mais la vitesse de ces points est nulle (ce qui est différent de la fixité ou du repos (15,2°)), parce que, après s'être rapprochés de la surface fixe, ils s'en éloignent immédiatement : ils rebondissent, pour ainsi dire, sur cette surface, et leur vitesse change de sens en passant par zéro. L'arête de contact considérée comme ligne géométrique située sur le cylindre fixe se meut parallèlement à elle-même, avec une vitesse qui dépend de la rapidité du mouvement du cylindre mobile.

2° Les arcs décrits, même pendant des temps très-courts, par les divers points du système mobile ne sont pas des arcs de cercle, ni même des arcs ayant même centre de courbure. Par exemple, dans le cas le plus simple, celui d'un cercle roulant dans son plan sur une droite, les points de la circonférence décrivent des arcs de cycloïde, tandis que le centre décrit une ligne droite.

On va voir (47) que, réciproquement, lorsqu'un système invariable se déplace parallèlement à un plan fixe, pendant un temps fini, son mouvement, s'il n'est pas une translation ou une rotation effective, est un mouvement de roulement cylindrique.

Pour le démontrer, nous établirons deux propositions préparatoires, et d'ailleurs utiles en elles-mêmes.

44. Lorsqu'un système invariable se déplace parallèlement à un plan, on peut toujours l'amener d'une de ses positions successives à une autre quelconque d'entre elles, soit par une simple translation, soit par une simple rotation. — Quel que soit, en effet, le système dans l'espace, il suffit, pour définir son mouvement, de considérer le déplacement de sa projection rectangulaire sur le plan fixe. Soient AB, AB′ (fig. 16), les deux positions d'une droite de cette projection, soit O l'intersection des deux perpendiculaires aO, bO, sur AA′, BB′, en leurs milieux. Les deux triangles AOB, A′OB′, dont les côtés sont égaux chacun à chacun, sont superposables par une rotation autour de O, qui amènera en même temps (42) tous les points du système de leur première position à la dernière. Si les deux droites AB, A′B′ étaient parallèles, O serait à l'infini, la rotation deviendrait une translation. Ainsi, la proposition est démontrée dans tous les cas.

Remarque. — Le déplacement angulaire du système pour passer de la première à la seconde des positions considérées, est l'angle des deux perpendiculaires égales menées de O sur AB et sur A′B′, angle égal à celui de ces deux droites.

Il resterait donc le même si, à la deuxième position A′B′ du système, on en substituait une troisième A″B″, obtenue par une translation à partir de la deuxième.

45. Lorsqu'un système invariable se transporte parallèlement à un plan, son mouvement élémentaire à un instant quelconque est une translation ou une rotation. — Par cet énoncé nous entendons que, sauf le cas où, à l'instant dont il s'agit, les vitesses sont égales et parallèles, elles ont les mêmes directions et les mêmes rapports entre elles que si le système tournait effectivement autour d'un axe perpendiculaire au plan fixe. En effet, soient AA′, BB′, CC′... (fig. 17) les cordes des arcs de trajectoires décrits simultanément par les points A, B, C... de la projection du système sur le plan fixe. A mesure que ces

arcs, de courbure quelconque, diminuent, le point O, commune intersection des perpendiculaires menées aux milieux des cordes, approche d'une limite O_1, intersection des normales, en A, B, C..., et les rapports des vitesses approchent indéfiniment de ceux des distances O_1A, O_1B, O_1C...

46. Centre instantané et axe instantané de rotation. — Si le mouvement du système était une rotation effective, l'axe de cette rotation serait la droite dont le point O_1, intersection des normales, est le pied, et cet axe serait fixe pendant toute la durée de la rotation. Dans tout autre cas, les arcs décrits par les points A, B, C... n'étant plus circulaires et concentriques, le point O_1 et la droite dont il est le pied changent continuellement de position dans l'espace. On les appelle *centre instantané* et *axe instantané* de rotation.

Le rapport commun, à un instant déterminé, des vitesses de tous les points du système aux distances de ces points à l'axe instantané de rotation est, à cet instant, la *vitesse angulaire* du système.

Les points liés au système mobile qui se trouvent à un certain instant sur l'axe instantané de rotation ont, à ce même instant, une vitesse nulle, sans être en repos. Cet axe, autour duquel le système ne tourne pas effectivement, serait plus exactement désigné sous la dénomination d'axe central actuel des *vitesses*, que sous celle d'axe instantané de *rotation*.

Remarque. — Il est facile de voir que, lorsqu'une figure plane invariable se déplace dans son plan, pour déterminer son centre instantané de rotation il suffit de connaître les *directions* des vitesses de deux de ses points, pourvu que ces vitesses ne soient pas perpendiculaires à la droite qui joint les deux points. Si, au contraire, elles le sont, il faut connaître leur *rapport*, qui est égal au rapport des distances des deux points au centre instantané situé sur la droite qui les contient. Ainsi, si

les vitesses v et v' des points M et M' sont perpendiculaires, dans un même plan, à la droite MM', et si l'on a le rapport $\frac{v'}{v} = n$, on a, pour déterminer le centre instantané O (fig. 17), l'équation

$$OM = MM' \frac{v}{v - v'} = \frac{1}{1 - n} MM',$$

formule générale eu égard aux signes. Le centre instantané une fois déterminé, il ne faut plus connaître que la vitesse d'un point de la figure et sa distance à ce centre, pour en conclure la vitesse angulaire de la figure, et par suite la vitesse linéaire d'un quelconque de ses points qui serait donné.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition annoncée à la fin du numéro 43.

47. Tout mouvement d'un solide parallèlement à un plan est généralement un roulement cylindrique. — Il s'agit de faire voir que, lorsqu'un système invariable se meut pendant un certain temps parallèlement à un plan fixe, ce mouvement équivaut au roulement sans glissement d'une surface cylindrique liée au système, sur une autre surface cylindrique fixe.

Pour le démontrer et reconnaître quelles sont les deux surfaces cylindriques roulant l'une sur l'autre, il suffit de considérer une figure plane invariable qui se meut dans son plan. Substituons à la courbe des centres instantanés de rotation sur ce plan une suite de points distincts O, O', O'', O'''... (fig. 18) que nous prendrons pour centres de rotations effectives, et qui pourront ensuite être rapprochés indéfiniment.

Soit (F) une figure plane quelconque. Supposons qu'elle tourne actuellement autour du point O et se déplace d'un angle α; qu'ensuite elle tourne autour de O' et se déplace de α'; qu'ensuite elle tourne autour de O'' avec un déplacement angulaire α'', et ainsi de suite. Avec ces données il est facile de

construire le polygone $MM'M''M'''\ldots$, qui, lié invariablement à la figure (F), soit tel qu'en le faisant rouler sur le polygone $OO'O''O'''\ldots$ on fasse subir à cette figure les mouvements qui viennent d'être exprimés.

A cet effet, tracez MM' égale à OO' et faisant l'angle $M'OO' = \alpha$; puis menez $M'm''$ faisant ang. $MM'm'' =$ ang. $OO'O''$, et tracez $M'M''$ égale à $O'O''$ et faisant ang. $M''M'm'' = \alpha'$; menez de même $M''m'''$ faisant ang. $M'M''m''' =$ ang. $O'O''O'''$, et tracez $M''M'''$ égale à $O''O'''$ et faisant ang. $M'''M''m''' = \alpha''$; ainsi de suite.

Non-seulement, pendant le mouvement supposé de la figure (F), le polygone $MM'M''M'''\ldots$ lié à cette figure roulera sur le polygone $OO'O''O'''\ldots$; mais, si l'on imagine le mouvement du polygone $OO'O''O'''\ldots$ relativement à la figure (F) prise pour système de comparaison, on voit que ce polygone $OO'O''O'''\ldots$ roule sur le polygone $MM'M''M'''\ldots$

En considérant les longueurs OO', $OO''\ldots$ comme infiniment petites, et en étendant à un système dans l'espace ce qui vient d'être dit d'une figure plane, on conclut que *quand un système invariable se meut parallèlement à un plan, la droite qui occupe les positions successives de l'axe instantané de rotation décrit dans l'espace fixe un cylindre, en même temps qu'elle décrit relativement au système mobile un autre cylindre qui peut être imaginé roulant sans glissement sur le premier et entraînant avec lui le système auquel il serait invariablement lié.*

ROTATION AUTOUR D'UN POINT FIXE.

48. Roulement conique. — Les considérations des numéros 43 et suivants, se rapportant à un solide qui se meut parallèlement à un plan, s'étendent au mouvement d'un solide dont les points conservent leurs distances à un point fixe autour duquel il pirouette. Elles peuvent, comme on va le voir, être reproduites dans les mêmes termes, avec cette différence que les surfaces cylindriques sont remplacées par des surfaces coniques

ayant pour sommet le point fixe, et les projections rectangulaires sur un plan sont remplacées par des projections coniques sur une sphère dont le centre est le même point fixe.

Imaginons qu'un système invariable soit invariablement attaché à une surface conique de base quelconque, qui roule sans glisser sur une autre surface conique, fixe et ayant même sommet que la première. Chaque point du système se meut sur une surface sphérique, dont le centre est le sommet commun des cônes. Dans le cas particulier où les deux surfaces coniques sont de révolution, la courbe que décrit un point de la surface conique mobile se nomme *épicycloïde sphérique*. En général, ce genre de mouvement se nomme *mouvement épicycloïdal sphérique* ou *roulement conique*.

Quelles que soient les surfaces coniques, la relation qui lie entre elles les vitesses des différents points du système mobile, à un même instant, se reconnaît aisément. En effet, remplaçons les cônes par des pyramides inscrites à faces très-étroites et égales (pour plus de simplicité). Les courbes décrites dans ce cas par les points du système en mouvement, pendant un temps très-court, sont des arcs circulaires dont les plans sont perpendiculaires à l'arête actuellement, comme aux deux surfaces pyramidales, et dont les centres sont sur cette arête. Les vitesses de ces divers points sont donc, quant à leur direction, perpendiculaires chacune au plan qui contient le point considéré et l'arête commune; et, quant à leur grandeur, ces vitesses sont proportionnelles aux distances des points à cette même arête. Ces deux propriétés, indépendantes de la grandeur des faces des pyramides, subsistent par conséquent dans le cas des surfaces coniques. Donc, dans le roulement conique, les directions et les rapports des vitesses sont à chaque instant les mêmes que si la génératrice de contact des deux surfaces coniques était fixe à partir de cet instant. Cette droite est donc encore un axe instantané de rotation.

Les remarques finales du numéro 43 s'appliquent également

ici. Les points du système mobile qui sont situés actuellement sur l'axe instantané de rotation ont leur vitesse nulle. Le sommet du cône mobile est le seul point de ce système qui soit en repos. Les points géométriques formant à chaque instant la droite de contact ou de roulement des deux cônes se déplacent continuellement, et sur le cône fixe et sur le cône mobile.

Dans ce cas, comme dans celui du roulement cylindrique, les vitesses à un même instant sont toutes parallèles à un même plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation, et les vitesses des points situés dans un même plan passant par cet axe sont perpendiculaires à ce dernier plan.

Etablissons maintenant trois théorèmes analogues à ceux des numéros 44, 45 et 47.

49. Lorsqu'un système invariable se déplace autour d'un point fixe auquel il reste lié, on peut toujours l'amener d'une à une autre de ses positions successives par une rotation effective autour d'un axe passant par ce point.—Il suffit, pour le démontrer, d'appliquer le raisonnement du numéro 44 à la projection conique du système sur une sphère dont le point fixe est le centre, les lignes droites de la figure devenant des arcs de grands cercles.

50. Tout mouvement élémentaire d'un système invariable dont un point est sans vitesse est une rotation instantanée autour d'un axe passant par ce point. — C'est une conséquence de la proposition précédente.

51. Tout mouvement d'un solide autour d'un point fixe est un roulement conique. — C'est-à-dire que *le mouvement fini d'un système invariable dont un point est fixe se réduit à un mouvement épicycloïdal sphérique. La droite, qui occupe les positions successives de l'axe instantané de rotation ou des vitesses, décrit dans l'espace un cône fixe, en même temps qu'elle décrit par rapport au système mobile un autre cône, qui peut être imaginé rou-*

lant sans glissement sur le premier, et entraînant avec lui le système auquel il serait invariablement lié. La démonstration de cette proposition serait calquée sur celle du numéro 47, en prenant les points O, O′, O″,... à une distance constante du centre fixe de rotation, et en considérant les angles indiqués dans la figure comme des angles dièdres.

52. Analogie du mouvement parallèle à un plan et du mouvement autour d'un point. — Le mouvement de roulement cylindrique et toutes ses propriétés ne sont que des cas particuliers du mouvement de roulement conique, et des propriétés qui s'y rapportent. Les positions successives de l'axe instantané de rotation peuvent être, dans le premier de ces deux mouvements, considérées comme se rencontrant à l'infini.

MOUVEMENT QUELCONQUE COMPOSÉ D'UNE TRANSLATION ET D'UNE ROTATION.

53. Première image sensible du mouvement le plus général d'un système invariable. — Quel que soit le mouvement d'un système invariable, si on le considère relativement à des axes de comparaison qui soient eux-mêmes mobiles, le mouvement absolu du système, à partir d'un instant pris à volonté, se trouve composé d'un mouvement d'entraînement (qui est celui qu'il aurait si, à compter du même instant, il restait lié aux axes de comparaison), et d'un mouvement relatif.

Appliquons cette idée générale en imaginant que le système de comparaison mobile soit simplement en translation commune avec un point choisi du corps ou système principal; le mouvement de ce dernier ensemble se compose de cette translation et d'un pirouettement ou mouvement sphérique autour du point choisi, puisque ce point est immobile dans le système de comparaison. En rapprochant cette proposition de celle qui a été établie au numéro 51, on conclut que

Tout mouvement continu d'un système invariable équivaut au roulement d'un cône lié au système, sur un autre cône qui aurait

un mouvement de translation dans l'espace, le premier cône étant le lieu géométrique, dans le corps en mouvement, des axes instantanés de sa rotation autour du point choisi; le second cône étant le lieu des mêmes axes instantanés dans le système de comparaison en translation (*).

Par conséquent, à un instant déterminé, les vitesses des points du système sont les résultantes d'une vitesse commune à une certaine translation, et des vitesses dues à une rotation simple autour d'un axe instantané suivant lequel les deux cônes se touchent.

L'énoncé qui précède et son corollaire comprennent le cas particulier où le mouvement relatif du système principal serait une rotation effective. Le second cône se réduirait alors à la droite qui serait l'axe de cette rotation, fixe dans le système de comparaison et se transportant en réalité dans l'espace parallèlement à lui-même. Ce cas est, à très-peu près, celui du mouvement du globe terrestre relativement à l'écliptique considérée comme immobile.

La décomposition que nous venons d'indiquer d'un mouvement quelconque d'un solide, en une translation et une rotation, peut se faire d'une infinité de manières, puisqu'on peut prendre, pour déterminer la translation, le mouvement d'un point quelconque lié invariablement au système solide. L'étude des diverses décompositions possibles d'un même mouvement constitue la théorie dont nous allons nous occuper au paragraphe 3. Auparavant nous présenterons comme exercices utiles quelques exemples, qui se rapportent au troisième cas de mouvement traité numéros 43 et suivants.

EXEMPLES DE MOUVEMENT PARALLÈLE A UN PLAN.

54. Droite mobile sur deux courbes. — *Deux points* B *et* B'

(*) Nous verrons plus loin (69) une autre manière de se figurer clairement le mouvement quelconque d'un système invariable.

(fig. 19), *dont la distance est constante, glissent sur deux lignes* BN *et* BN′, *fixes dans un même plan.* On demande les rapports des vitesses des points B, B′, et d'un point quelconque M, invariablement lié à la droite BB′.

L'intersection O des normales CB, C′B′ est (50) le centre instantané de rotation du système BMB′. Donc, si v, v' et u sont les vitesses de B, B′ et M, on a $\frac{v}{BO} = \frac{v'}{B'O} = \frac{u}{MO}$; ce sont trois expressions de la vitesse angulaire de BMB′ autour de O. Le point M décrit une courbe dont MO est la normale.

Il n'est pas nécessaire de déterminer le centre O (qui peut être fort éloigné de B et de B′) pour obtenir le rapport $\frac{v}{v'}$. De $\frac{v}{BO} = \frac{v'}{B'O}$ on conclut, à cause du triangle BOB′,

$$v \sin OBB' = v' \sin OB'B.$$

Or, ces deux sinus sont aussi les cosinus des angles de la droite BB′ avec les vitesses v et v' dirigées suivant les tangentes en B et B′. La dernière équation exprime donc l'égalité des projections rectangulaires des deux vitesses v et v' sur BB′, conformément au théorème du numéro 37.

55. **Droite mobile sur deux cercles.** — Si les courbes BN, B′N′ sont des arcs de cercle dont les rayons sont r et r', et dont les centres sont C et C′; et si w et w' désignent les vitesses angulaires actuelles des points B et B′ autour de ces centres, on peut se proposer de trouver le rapport de ces deux vitesses angulaires en fonction de lignes de la figure. En appelant α et α' les angles ci-dessus désignés, et en considérant les perpendiculaires CP, C′P′ des centres sur BB′, on a, d'après la dernière équation,

$$wr \sin\alpha = w'r' \sin\alpha', \text{ ou } w \cdot CP = w' \cdot C'P', \text{ ou } w \cdot CI = w' \cdot C'I.$$

Ainsi, les vitesses angulaires sont réciproques aux distances des centres, soit à la droite BB′, soit à l'intersection I des droites CC′, BB′.

Cette expression du rapport des deux vitesses angulaires est applicable, comme nous le verrons, à certaines machines. Lorsque l'intersection I est très-éloignée des centres, il est commode de tracer, par le centre C de l'un des cercles, une droite CL parallèle au rayon C′B′ de l'autre et décrire la relation

$$w \cdot \mathrm{CL} = w' r'.$$

Lorsque l'intersection de la droite des points tels que B et B′ avec la droite des centres C et C′ se trouve, comme I, en dehors de la distance CC′, les deux rayons CB et C′B′ tournent dans le même sens. Si l'on suppose, au contraire, que les deux points mobiles sur les deux circonférences soient situés comme B′ et b, de sorte que la droite de longueur invariable soit B′b et rencontre CC′ en i, les deux rayons C′B′ et Cb tournent en sens contraires, mais la relation précédente entre les deux vitesses angulaires subsiste. On trouvera aisément, en répétant les mêmes raisonnements et en traçant Ci parallèle à C′B′, les deux relations

$$w' \cdot \mathrm{B'C'} = w \cdot \mathrm{Ci} \quad \text{et} \quad w \cdot \mathrm{Ci} = w' \cdot \mathrm{C'i}.$$

Ces propriétés s'énonceraient dans les mêmes termes que pour le premier cas.

Cet exemple montre bien, 1° que la rotation instantanée de BB′ autour de O′ n'est pas une rotation effective, puisque B et B′ tournent réellement autour de C et de C′ ; 2° que le centre instantané O n'est pas le centre de courbure des courbes décrites par les points B, B′, M... du système mobile.

56. Cas particulier où l'un des points B et B′ se meut en ligne droite. — AA (fig. 20) étant la droite fixe que doit suivre

le point B′ de la figure BMB′ mobile, C le centre de la circonférence sur laquelle se meut le point B, l'intersection O de CB et de B′O, perpendiculaire à AA, est le centre instantané de la rotation de BB′M. Si v est la vitesse linéaire du point B′, et w la vitesse angulaire du rayon CB, on a, en menant CI perpendiculaire à AA, et prolongeant B′B,

$$\frac{v}{OB'} = \frac{w \cdot CB}{OB}, \quad \text{d'où} \quad v = w.CI.$$

57. Epicycloïde et cycloïde. — Ces deux courbes offrent des applications évidentes du numéro 43, notamment en ce qui concerne leur tangente en un point quelconque.

58. Développante d'une courbe quelconque. — Le centre instantané de rotation de la tangente est au point de contact et se confond, dans ce cas, avec le centre de courbure de la courbe décrite par un quelconque des points de la tangente mobile.

59. Conchoïde. — AB (fig. 21) est une droite directrice ; le point O est fixe ; OM, rayon vecteur du point mobile M ; mM, longueur constante. L'intersection O′ de mO′, perpendiculaire à AB, et de OO′, perpendiculaire à OM, est le centre instantané de rotation de la droite mobile mM, entraînant avec elle le point qui, actuellement situé en O, a par conséquent sa vitesse suivant OM. La droite MO′ est normale à la courbe.

§ 3.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS, ET SPÉCIALEMENT DES VITESSES D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

60. Composition des vitesses de translation. — On sait déjà, par ce qui précède, que, si un système de comparaison est en mouvement et qu'un autre système possède, relativement au pre-

mier, un mouvement quelconque, le mouvement que le second système a effectivement dans l'espace est dit *composé du mouvement du système de comparaison et du mouvement relatif du second système dans le premier*. Nous considérons ici le cas très-simple de deux translations. Il est facile de voir que, *si tous les points des axes de comparaison ont des vitesses égales et parallèles* v_e, *et que le corps ou système considéré ait en tous ses points des vitesses relatives égales et parallèles* v_r, *le mouvement absolu de ce système est une translation, au moins élémentaire, dont la vitesse* v *s'obtient par la composition des vitesses* v_e *et* v_r (29). Ce théorème s'étend évidemment à un nombre quelconque de translations se réduisant à une translation unique, dont la vitesse s'obtient par la règle du polygone des vitesses (31).

61. Composition des vitesses de deux rotations autour d'axes concourants. — Soient deux axes **OA'**, **OA''** (fig. 22), qui, avec une troisième droite, par exemple avec la perpendiculaire projetée en **O**, forment un système invariable de comparaison. Supposons que son mouvement absolu soit une rotation effective ou seulement instantanée, autour de la droite **OA'**, avec une vitesse angulaire w'. En même temps, un autre assemblage invariable, que nous appellerons **C** (et qu'on peut se représenter comme formant un corps solide réel), par son mouvement relativement au système de comparaison **OA'A''**, tourne autour de **OA''** avec une vitesse angulaire w''. Le point **O**, que l'on peut considérer comme lié au corps **C**, étant actuellement sans vitesse, il s'ensuit (54) que ce corps a un axe instantané de rotation passant par **O**; c'est-à-dire qu'il y a actuellement une droite liée au corps solide **C**, dont tous les points ont leurs vitesses absolues nulles, tandis que tous les autres points de ce corps ont autour d'elle une vitesse angulaire commune w_1. Il s'agit de trouver la situation actuelle de cet axe de rotation, et de plus l'intensité et le sens de cette vitesse angulaire w_1.

Pour fixer les idées, supposons 1° que les longueurs **OA'**, **OA''**

soient proportionnelles aux vitesses angulaires w', w'', et les représentent par conséquent moyennant le choix d'une certaine unité; 2° que le sens de chaque rotation soit tel que, si un observateur placé en O dirigeait sa vue, tantôt vers A', tantôt vers A'', il verrait les deux rotations se faire dans le sens où nous voyons tourner une aiguille d'horloge (c'est le sens que les astronomes appellent *sens direct* des rotations, comme celle de la terre autour d'axes qui, partant de points du système solaire, se dirigent vers la région céleste où se trouve le pôle boréal; c'est encore le sens de la rotation d'une vis ordinaire qu'on enfonce, etc...).

D'après ces conventions, les droites OA', OA'' seront les axes *représentatifs* des deux rotations (alignement (*) des axes, sens et grandeurs des vitesses angulaires).

De plus, pour abréger le langage, supposons que le plan A'OA'' soit horizontal.

On voit d'abord que, pour aucun des points du corps C situé hors du plan A'OA'', la vitesse absolue résultante des deux vitesses, l'une d'entraînement autour de OA', l'autre relative autour de OA'', ne peut être nulle. C'est donc dans ce plan qu'est l'axe instantané cherché. Pour trouver sa direction et en même temps

(*) Nous croyons utile d'introduire dans le langage de la science ce mot *alignement*, dont nous précisons ici la signification, ainsi que celle de quelques autres expressions fréquemment employées et se rapportant au même ordre d'idées :

Deux droites parallèles décrites en même sens, dans l'espace, ont même *situation angulaire*, parce qu'elles font les mêmes angles avec trois axes coordonnés;

Deux droites limitées, situées sur un même axe indéfini, ont même *alignement*, quels que soient leurs origines et le sens dans lequel chacune d'elles est supposée engendrée ou décrite;

Deux droites de même alignement et de même sens ont une même *direction*; elles peuvent différer par l'origine et l'étendue.

Deux droites de même alignement et de sens contraires sont *directement opposées*.

la vitesse angulaire absolue du corps M, imaginons élevée, à partir de O, une droite Oo, verticale, et par conséquent perpendiculaire aux axes OA′, OA″, et à l'axe cherché. Faisons cette droite égale à l'unité de longueur, et en la supposant liée invariablement au corps C, cherchons la vitesse absolue de son extrémité supérieure. Or, ce dernier point a sa vitesse linéaire d'entraînement égale à w' et représentée par l'horizontale oa′, égale et rectangulaire à OA′; il a sa vitesse linéaire relative égale à w'' et représentée par l'horizontale oa″, égale et rectangulaire à OA″. Sa vitesse linéaire absolue, qui est en même temps la vitesse angulaire absolue w_1 du corps C (puisque ce point o est à une distance égale à l'unité de l'axe de rotation cherché, lequel est dans le plan A′OA″ et passe par O), est donc représentée par la diagonale ob. L'axe instantané de rotation cherché est donc suivant une droite menée dans le plan A′OA″, à angle droit sur ob ; et si sur cette droite on porte dans l'angle A′OA″, comme l'indique la figure, une longueur OB égale à ob, on aura, pour l'alignement, le sens et la grandeur, l'axe représentatif de la rotation absolue du corps C. Nous en concluons aisément les propositions suivantes :

Théorème. *La droite* OB, *qui représente, pour la direction et la grandeur, la rotation résultante* w_1 *de deux rotations concourantes* w', w'', *est la diagonale du parallélogramme* A′OA″B *construit sur les axes représentatifs des rotations composantes.*

Corollaire. — *Si* M *est un point quelconque du corps* C, p' *sa distance à l'axe* OA′, p'' *sa distance à l'axe* OA″, p_1 *sa distance à l'axe* OB, *la vitesse absolue du point* M, *résultante des vitesses* $w'p'$ *et* $w''p''$, *respectivement perpendiculaires aux plans* OA′M, OA″M, *est perpendiculaire au plan* OBM *et égale à* $w_1 p_1$, *le facteur* w_1 *étant obtenu comme il vient d'être dit.*

62. Composition d'un nombre quelconque de rotations concourantes. — Le théorème précédent conduit à la compo-

sition des vitesses angulaires d'un nombre quelconque de rotations autour d'axes concourants en un même point. *L'axe représentatif w_1 de la rotation résultante est la droite qui ferme le polygone formé des axes représentatifs des rotations composantes transportés parallèlement et bout à bout, en conservant leurs sens.*

Par suite de cette remarque, et conformément au corollaire qu'on vient de voir, lorsque le mouvement d'un corps résulte de la composition de plusieurs rotations w', w'',..... autour d'axes concourants OA', OA'',.... si l'on désigne par p', p''..... les distances d'un point M de ce corps aux axes des rotations composantes, sa vitesse absolue, résultante des vitesses $w'p'$, $w''p''$,.... respectivement perpendiculaires aux plans MOA', MOA'',.... est égale à w_1p_1, produit de deux facteurs dont l'un est la rotation w_1 obtenue par la composition des rotations w', w''..., et l'autre est la distance du point M à l'axe OA_1, de la rotation résultante ; de plus, cette vitesse w_1p_1 est perpendiculaire au plan MOA_1 ; enfin, le sens de cette vitesse est déterminé par celui de l'axe OA_1, suivant la convention du numéro 60.

63. Composition des vitesses de deux rotations dont les axes sont parallèles. — Le corps se mouvant parallèlement à tout plan perpendiculaire aux deux axes, nous savons déjà que ce corps a un axe instantané de rotation qui est parallèle à ces derniers (45).

1° Si les rotations w' et w'' sont de même sens, supposons-les représentées par O'A' et O''A'' (fig. 23). Comme précédemment, pour bien comprendre ce qu'on doit entendre par la composition de ces deux rotations, il faut se figurer que les deux droites O'A' et O''A'' constituent un système invariable de comparaison qui tourne autour de l'une d'elles, O'A' par exemple, tandis qu'un corps C tourne relativement autour de l'autre. Il en résulte que le corps C a actuellement, dans son mouvement absolu, un axe instantané de rotation et une vitesse angu-

laire w_1 qu'il s'agit de trouver. Toutes les vitesses absolues des points du corps C, qui sont actuellement dans le plan O'A'A'', sont perpendiculaires à ce plan comme les deux composantes, l'une d'entraînement, l'autre relative. Elles sont nulles pour tous les points de la parallèle O_1A_1, dont les distances a' et a'' aux deux axes O'A' et O''A'' satisfont à la condition

$$w'a' = w''a'';$$

car le premier membre est une vitesse linéaire descendante, au-dessous du plan O'A'A''; le second membre une vitesse ascendante; leur égalité détermine évidemment l'axe instantané O_1A_1, dont la vitesse est nulle.

Pour avoir la vitesse angulaire résultante ou absolue du corps C autour de l'axe O_1A_1, il suffit de remarquer que la vitesse absolue d'un point quelconque M de ce corps, situé dans le plan des axes à la distance x de O_1A_1, est tout à la fois exprimée w_1x et par la somme des deux vitesses composantes $w'(x + a')$ et $w''(x - a'')$. On a donc

$$w_1x = w'(x + a') + w''(x - a''),$$

condition qui, eu égard à la relation $w'a' = w''a''$, est constamment remplie, quelle que soit la distance x, par cette autre relation :

$$w_1 = w' + w''.$$

Ainsi, *l'axe représentatif de la rotation résultante est parallèle à ceux des rotations composantes; il est égal à leur somme et divise leur distance en deux parties inversement proportionnelles aux rotations composantes.*

2° Si les rotations composantes, dont nous désignons les valeurs absolues par w' et w'', sont de sens contraires, dans l'intervalle de leurs axes O'A' et O''A'' (fig. 24) les vitesses composantes sont de même sens; en dehors de cet intervalle et du

côté de la plus petite des deux rotations, l'une des deux vitesses composantes l'emporte sur l'autre; en dehors de l'intervalle et du côté de la plus grande vitesse angulaire, la vitesse est nulle pour tous les points du corps C situés sur la parallèle O_1A_1, si l'on a

$$w'a' = w''a''.$$

On a d'ailleurs pour un point M, d'après l'observation faite au cas précédent :

$$w_1 x = w'(x - a') - w''(x - a''),$$

d'où, à cause de $w'a' = w''a''$,

$$w_1 = w' - w''.$$

Ainsi, *l'axe représentatif de la rotation résultante est encore parallèle à ceux des rotations composantes de sens contraires; il est égal à leur différence; il est situé hors de leur intervalle, du côté et dans le sens de la plus grande, et ses deux distances aux axes des rotations composantes sont inversement proportionnelles à celles-ci.*

Remarque. — Si l'on se donne deux rotations parallèles w' et w'', et la distance a de leurs axes, on trouvera la distance a' de l'axe de la rotation résultante w_1 à l'axe de la première rotation composante, en remplaçant a'' dans l'équation $w'a' = w''a''$ par son expression en a et a', c'est-à-dire en posant :

1° Quand les composantes sont de même sens,

$$w'a' = w''(a - a'), \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{w''}{w' + w''}\, a;$$

2° Quand les composantes sont de sens contraires,

$$w'a' = w''(a + a'), \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{w''}{w' - w''}\, a.$$

64. Cas de deux rotations parallèles égales et de sens contraires. — Les formules précédentes donneraient $w_1 = 0$ et $a' = \infty$. C'est une solution qu'on pourrait interpréter, mais qu'il vaut mieux obtenir directement. Pour un point quelconque M du corps C (fig. 24) dans le plan O'A'O''A'', à la distance x' de l'axe O'A', on a $v_e = w'x'$, vitesse d'entraînement descendante au-dessous de ce plan, et $v_r = w''(x' - a)$, vitesse relative ascendante; donc la vitesse résultante du point M dans le sens descendant

$$v = v_e - v_r = w'x' - w''(x' - a).$$

Or, on suppose $w' = w'' = w$; donc $v = wa$ constante, quel que soit M pour l'instant dont il s'agit. Le mouvement absolu ou résultant est donc à cet instant une translation perpendiculaire au plan des axes des vitesses composantes. La vitesse linéaire de cette translation est égale à la vitesse angulaire commune des deux rotations, multipliée par la distance de leurs axes. Enfin, le sens de cette vitesse est celui de la vitesse d'un des axes considéré comme tournant autour de l'autre, en vertu de la rotation composante autour de ce dernier.

Un tel système de deux rotations parallèles égales et de sens contraires s'appelle *un couple de rotations;* il est équivalent à une translation à chaque instant perpendiculaire au plan des deux axes, et des propriétés qui viennent d'être démontrées il résulte que la translation à laquelle se réduit un couple de rotations ne change pas, si l'on remplace ce couple par un autre dont les deux axes de rotation soient dans un plan parallèle à celui des deux premiers, les nouveaux axes pouvant être tracés suivant des alignements quelconques dans ce second plan, sous la double condition : 1° que, l'intensité commune des nouvelles rotations étant w' et la distance de leurs axes étant a', le produit $w'a$ soit égal au produit analogue wa correspondant au premier couple; 2° que le sens des nouvelles rotations w'

soit choisi (fig. 25), de manière que le sens de la translation v ne soit pas changé.

65. Remarque sur l'instantanéité de l'axe de la rotation résultante de deux rotations. — Lorsque le mouvement absolu d'un solide résulte de la composition de deux translations finies, il est lui-même une translation finie. Mais, sauf le cas d'un couple, la composition de deux rotations finies, dont les axes concourent ou sont parallèles, ne donne lieu qu'à une suite de rotations instantanées autour d'un axe mobile. Cela résulte de ce que l'axe instantané de la rotation absolue est à chaque instant dans le plan variable qui contient l'axe fixe de la rotation du système de comparaison et l'axe de la rotation relative.

Un exemple va rendre sensible cette observation, en même temps qu'il confirmera l'idée qu'il faut se faire de la composition de deux rotations.

Une droite **AB** (fig. 26) tourne dans le plan fixe de la figure avec une vitesse angulaire constante w autour du point **A**, pendant qu'une autre droite **BD** a autour du point mobile **B** une rotation uniforme w' relativement à **AB**, de sorte que, lorsque celle-ci a pris la position AB_1, la droite **BD** a la position B_1D_1, faisant avec le prolongement de **AB** un angle qui est à l'angle B_1AB dans le rapport constant $\frac{w'}{w}$. Le point **D** décrit une courbe DD_1D_2,... dont les normales passent par les centres instantanés **O**, O_1, O_2... La vitesse angulaire absolue de **BD**, dans ses positions successives, est constamment $w + w'$ autour du centre instantané variable. La vitesse absolue du point **D** varie proportionnellement aux distances **OD**, O_1D_1, O_2D_2. Enfin, pour appliquer les considérations du numéro 47, portons, à partir de **B**, des longueurs

$$BM_1 = B_1O_1, \quad BM_2 = B_2O_2, \quad BM_3 = B_3O_3\ldots,$$

formant les angles

$$DBM_1 = D_1B_1O_1, \quad DBM_2 = D_2B_2O_2, \quad DBM_3 = D_3B_3O_3\ldots,$$

nous obtenons ainsi la courbe $OM_1M_2M_3\ldots$ qui, en roulant sur la courbe $OO_1O_2O_3\ldots$, ferait prendre à la droite BD, entraînée avec elle, les positions successives B_1D_1, B_2D_2, $B_3D_3\ldots$; et, à cause de l'invariabilité du rapport $\frac{w'}{w} = \frac{OA}{BO}$, ces deux courbes sont circulaires.

Si les deux rotations w et w' étaient égales et de sens contraires, la droite BD se transporterait parallèlement à elle-même, le point B restant sur la circonférence $BB_1B_2\ldots$ La vitesse commune à tous les points de cette droite serait $w \cdot AB$, et à chaque instant perpendiculaire à la position qu'occupe la droite AB.

66. Composition d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe de la rotation. — Le mouvement absolu qui, pour un corps C quelconque, résulte de cette composition, est évidemment parallèle à tout plan perpendiculaire à la rotation, et par conséquent (45) il peut se réduire à une rotation simple, au moins instantanée, si ce n'est effective ou finie, autour d'un axe perpendiculaire à ce même plan.

Pour obtenir cet axe instantané et la grandeur de la rotation, prenons le plan dont nous venons de parler pour celui de la figure 27. Soit O le point où se projette l'axe de la rotation composante, dont la vitesse angulaire est w. L'axe est supposé dirigé en avant du plan de la figure, de sorte que le sens de la rotation est celui de la flèche w. Soit $V = OV$ la vitesse de la translation, de sorte que la composition de cette translation et de la rotation w signifie que, si un système de comparaison est actuellement en translation avec la vitesse V, l'axe O en repos dans ce système et entraîné dans son mouvement, est un axe de rotation autour duquel tourne, relativement au même système de comparaison, le corps C avec la vitesse angulaire w, d'où il suit que la vitesse absolue v d'un point M de ce corps situé à la distance r de l'axe O est la résultante de la vitesse d'entraînement V parallèle à la direction donnée OV, et de la vitesse wr

due à la rotation relative w. Or, parmi tous les points M qu'on peut considérer, il en est dont la vitesse est nulle : tel est le point O_1 qui, situé sur la droite menée de O perpendiculairement à OV, en est à une distance x satisfaisant à la condition $wx = V$. Tous les points du corps C ou liés à ce corps, qui sont projetés en O_1, jouissent de la même propriété de vitesse nulle et sont par conséquent sur l'axe instantané de la rotation de ce même corps. Quant à la grandeur de cette rotation, ou sa vitesse angulaire, il suffit de remarquer que, tandis que dans l'espace absolu, le point O_1 est sans vitesse, le point O y a la vitesse V perpendiculaire au rayon x; la vitesse angulaire est donc $\frac{V}{x}$ ou w (d'après l'équation ci-dessus $wx = V$), la même que celle de la rotation donnée autour de O. De là ce théorème :

Une rotation et une translation perpendiculaire à l'axe de la rotation se composent en une rotation instantanée, unique, égale et parallèle en même sens à la rotation composante; le plan qui contient l'axe de la rotation résultante et celui de la rotation composante est perpendiculaire à la translation, et la situation du nouvel axe dans ce plan est déterminée par la condition que sa vitesse, résultant des deux mouvements composants, soit nulle.

Réciproquement, sans altération de la liaison des vitesses d'un système solide, *une rotation peut être remplacée par un mouvement composé 1° d'une rotation égale, parallèle en même sens à la première et d'ailleurs située d'une manière quelconque, et 2° une translation perpendiculaire au plan des deux axes.*

En effet, soient O_1 l'axe de la rotation unique, w sa vitesse angulaire, O le nouvel axe, x la distance quelconque donnée; en donnant à la translation V la grandeur wx et la direction due à la rotation w autour de la rotation O_1, on se retrouve exactement dans les conditions de la question directe qui précède; non-seulement la proposition réciproque est démontrée, mais la grandeur et la situation angulaire de la translation composante sont déterminées.

Remarque. — On pourrait établir cette dernière proposition comme une conséquence de la propriété d'un couple de rotations (64). Etant donnée la rotation w autour de l'axe O_1, introduisons dans le corps en mouvement deux rotations autour de l'axe O, ayant toutes deux la même vitesse angulaire w; l'une de même sens que la rotation autour de O, l'autre de sens opposé. Ces deux rotations égales et contraires ne changent rien au mouvement absolu du corps C. Or, la rotation primitive autour de O_1 et celle dont l'axe est O et le sens contraire se composent (64) en une translation dont la vitesse est $V = wx$, à laquelle se joint autour de l'axe O parallèle à l'axe O_1 la rotation égale en même sens à la rotation primitive.

67. Composition ou réduction à deux mouvements simples, au point de vue des vitesses, d'un nombre quelconque de mouvements simples composants d'un système invariable. — Imaginons qu'un tel système possède dans l'espace fixe un mouvement simple (nous appelons ainsi une translation ou une rotation qui peut d'ailleurs n'être qu'instantanée) ; qu'un second système, qu'on peut supposer coïncidant actuellement avec le premier, ait, relativement avec celui-ci pris pour système de comparaison, un mouvement simple qui, en général, diffère du premier mouvement relatif ; que de même un troisième système ait, relativement au deuxième, un troisième mouvement simple, et ainsi de suite jusqu'à un dernier système invariable, qui est pour nous le corps principal C dont il s'agit de déterminer les vitesses actuelles : c'est ainsi qu'il faut comprendre la composition sous le rapport des vitesses, d'un nombre quelconque de mouvements simples d'un système invariable. D'après ce qu'on a vu au numéro 33, le résultat cherché est indépendant de l'ordre dans lequel on dispose les mouvements composants.

Cela posé, une rotation quelconque, prise parmi les mouvements composants peut être (66) remplacée par une autre, égale,

parallèle, de même sens, dont l'axe passe en un point M choisi à volonté, pourvu qu'à cette rotation substituée et, pour ainsi dire, transportée parallèlement à elle-même, on joigne une translation qui dépend du choix du nouvel axe de rotation. Concevons donc que ce déplacement soit fait pour toutes les rotations composantes du mouvement d'un même corps, de manière que tous les axes des rotations respectivement égales et parallèles qui leur sont substituées passent par un même point M lié invariablement au corps. Elles se composent (62) en une seule rotation indépendante du choix de ce point, quant à sa vitesse angulaire et à la situation angulaire de son axe. Seulement, ces divers transports des axes de rotation auront donné lieu à autant de nouvelles translations (66) qui, se composant avec les translations primitives, en donneront aussi une seule (60), et cette translation résultante variera en grandeur et en direction, suivant le choix du point M, dont la vitesse absolue est nécessairement celle de la translation unique dont il s'agit, puisque le point M situé sur l'axe de rotation final n'a aucune vitesse due à cette rotation.

En résumé, quels que soient les mouvements simples composants d'un système invariable, ils peuvent toujours se réduire à une translation commune à un point quelconque lié au système, et à une rotation indépendante du choix de ce point, et dont l'axe représentatif s'obtient, quant à sa grandeur et à sa situation angulaire, en transportant les axes représentatifs des rotations composantes parallèlement à eux-mêmes, en une même origine, et en les composant alors en un seul.

68. Axe central du mouvement d'un corps invariable. — Il y a une infinité de manières de faire la réduction précédente, puisqu'on peut choisir à volonté le point M dans l'espace en le supposant géométriquement lié au corps C.

Parmi ces diverses décompositions d'un même mouvement, il en est une qui se distingue en ce que *la translation est paral-*

lèle à l'axe de la rotation. Pour le démontrer, supposons le mouvement du corps C réduit, comme nous venons de le dire, à une translation ayant la vitesse du point M, et à une rotation autour d'un axe passant par ce point. Soit (fig. 28) $MV = v$ la vitesse de translation, et soit $MA = w$ l'axe représentatif de la rotation relative du corps C. L'angle AMV est désigné par α. Décomposons la vitesse v ou MV en deux vitesses rectangulaires, l'une v_1, parallèle à MA, l'autre v' perpendiculaire. Le mouvement instantané du corps C peut dès lors être considéré comme composé d'une translation dont la vitesse commune est égale et parallèle à v_1, et de deux autres mouvements (translation v' et rotation w), en vertu desquels le corps C se mouvrait parallèlement au plan perpendiculaire à MA, dont la trace sur le plan de la figure est MV'; ainsi, abstraction faite de la translation v_1, nous nous retrouvons dans le cas du numéro 66 et nous en concluons que les deux autres mouvements équivalent à une rotation dont la vitesse angulaire reste égale à w, et dont l'axe, parallèle à la droite MA avec laquelle se confond sa projection sur le plan de la figure, est en arrière de ce plan (considéré de manière que MV soit à droite de MA), à une distance x déterminée par l'équation $wx = v' = v \sin \alpha$.

En tenant compte maintenant de la translation v_1 parallèle à ce nouvel axe comme à MA, nous voyons réalisée la propriété énoncée tout à l'heure et que nous reproduisons en disant qu'*à un instant quelconque du mouvement le plus général d'un solide, on peut décomposer ce mouvement en une rotation instantanée autour d'un certain axe, et une translation parallèle à ce même axe.*

C'est ce qu'on exprime par une image sensible, en disant que *toutes les vitesses d'un système invariable en mouvement sont, à un instant quelconque, les mêmes que s'il était lié à une certaine vis se mouvant dans son écrou immobile*, cette vis ayant pour axe la droite dont on vient de voir la détermination. En d'autres termes encore, les vitesses de tous les points du système, à un instant

quelconque, sont les mêmes que si, à partir de cet instant, ils étaient assujettis à décrire des hélices de même pas autour de cette même droite.

Cet axe remarquable, unique à chaque instant, mais pouvant varier avec le temps, s'appelle l'*axe central instantané du mouvement* ou l'*axe instantané de rotation et de glissement* du système.

Si l'on cherche le pas h de la vis fictive ou des hélices dont il vient d'être question, on peut supposer que le mouvement héliçoïdal soit uniforme, c'est-à-dire que les quantités v et w soient constantes ; et en appelant T le temps d'une révolution, on aura

$$h = v \cos \alpha \cdot T, \quad \text{et} \quad 2\pi = wT, \quad \text{d'où} \quad h = \frac{2\pi v \cos \alpha}{w}.$$

69. Autres propriétés de l'axe central du mouvement. — 1° La vitesse due à la translation parallèle à l'axe central étant v_1, et la vitesse angulaire autour de cet axe étant w, si l'on appelle u la vitesse absolue d'un point quelconque M situé à une distance x de l'axe central, cette vitesse u résultante de v_1 et de wx, vitesses rectangulaires, est dans le plan mené par M tangentiellement au cylindre de révolution dont l'axe de figure est l'axe central et le rayon x. Cette vitesse a sa projection sur l'axe central égale à la vitesse v_1 de la translation commune à tous les points du système. Sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe central est égale à wx. Sa valeur $u = \sqrt{v_1^2 + w^2x^2}$ est la même pour tous les points situés à une même distance de l'axe et augmente avec cette distance. Les points situés sur l'axe central sont ceux du corps C qui ont actuellement la moindre vitesse, répondant, dans l'expression générale de u, à $x = 0$.

2° Si, à partir d'un même point K de l'espace, on imagine menées un nombre quelconque des droites égales et parallèles

aux vitesses d'un égal nombre de points du corps C à un même instant, les extrémités de ces droites seront toutes dans un même plan perpendiculaire à l'axe central instantané ; et si l'on abaisse du point K une perpendiculaire sur ce plan, elle indiquera la grandeur et la direction de la translation commune. Pour déterminer le plan dont il s'agit, il suffira de choisir seulement trois vitesses simultanées qui ne soient pas parallèles à un même plan. En se reportant ensuite aux points qui possèdent ces trois vitesses, et en projetant les uns et les autres rectangulairement sur un plan perpendiculaire à la translation obtenue, on déterminera sans difficulté la position de l'axe central ou de rotation et de glissement.

3° Les points du corps C ou liés à ce corps qui sont à un instant sur l'axe central de son mouvement, peuvent n'y être plus à un autre instant ; la position de l'axe central dans l'espace, la vitesse v_1, la vitesse angulaire w, la distance x d'un même point à l'axe sont en général variables avec le temps.

4° Les notions précédentes comprennent évidemment les deux cas particuliers d'une translation instantanée simple, et d'une rotation instantanée simple. Dans le premier la rotation est nulle ; dans le second c'est la translation.

70. Seconde image sensible du mouvement continu d'un système invariable. — Nous avons vu (53) que *tout mouvement continu d'un système invariable équivaut au roulement sans glissement d'un cône lié au système, sur un autre cône en translation dans l'espace.*

Il faut ajouter ici que *ce même mouvement équivaut à celui d'une surface réglée qui, étant liée au système, toucherait continuellement, suivant une génératrice, une autre surface réglée fixe dans l'espace, sur laquelle elle roulerait en glissant à chaque instant le long de la génératrice de contact des deux surfaces.*

En effet, les positions successives dans l'espace, de l'axe instantané de rotation et de glissement, forment une surface réglée,

c'est la surface immobile; et les positions de ce même axe instantané, relativement au système ou corps mobile, forment une autre surface réglée mobile, emportant le corps avec elle. A un instant quelconque, ces deux surfaces ont une génératrice commune D, c'est-à-dire deux génératrices D_1 et D_2 qui coïncident, l'une analogue à l'axe d'un écrou fixe, l'autre analogue à l'axe d'une *vis* en mouvement; et la seconde surface glisse sur la première, puisque tous les points de D_2 ont dans l'alignement de D_1 la vitesse v. De plus, ces deux surfaces sont tangentes tout le long de leur génératrice commune; car si nous imaginons sur la surface réglée mobile une seconde génératrice D'_2 infiniment proche de D_2 et devant coïncider après un temps dt avec une seconde génératrice D'_1 de la première surface, et si nous considérons sur ces deux droites D'_1 et D'_2 deux points qui vont coïncider, ces deux points ne peuvent être entre eux, à l'instant initial de dt, qu'à une distance infiniment petite du second ordre, sans quoi le parcours de cette distance pendant le temps dt donnerait lieu à une vitesse transversale finie qui, combinée avec la vitesse v longitudinale ou de glissement, produirait une vitesse résultante ayant une différence finie avec cette vitesse v, chose impossible en un point infiniment proche de D_2.

Cette proposition est, comme on le voit, une généralisation de deux cas particuliers précédemment traités. Si le corps se meut pendant un temps fini parallèlement à un plan, les surfaces réglées deviennent cylindriques (47). Si le corps pirouette effectivement autour d'un point fixe, ces surfaces sont coniques (51).

71. Au point de vue des vitesses, le mouvement quelconque d'un système invariable se décompose en trois translations parallèles à trois axes concourants, et trois rotations autour de trois axes concourant au même point. — Le mouvement du solide C peut d'abord se décomposer (53 et 67) en une translation commune à un point O lié à ce corps, et en une rotation autour

d'un axe passant par ce point. Soit $OV = v$ la direction et la grandeur de la vitesse de la translation. Si par O on mène trois axes, Ox, Oy, Oz, on peut décomposer OV en trois vitesses v_x, v_y, v_z, qui sont, suivant les axes, les arêtes contiguës d'un parallélipipède dont v ou OV est la diagonale. Ainsi, la translation représentée par OV est remplacée par trois translations dont les vitesses sont égales et parallèles à v_x, v_y, v_z. Reste à considérer la rotation autour d'un axe passant par O et représentée par l'axe $OA = w$. En menant par O trois axes Ox', Oy', Oz', qui peuvent en général être différents des trois premiers, on pourra décomposer OA ou w en trois rotations en $w_{x'}$, $w_{y'}$, $w_{z'}$, autour de ces axes, lesquelles seront les arêtes contiguës suivant Ox', Oy' et Oz', d'un parallélipipède dont w est la diagonale. C'est ce qui démontre la proposition. En voici le corollaire. Si, dans le système dont il vient d'être question, l'on considère un point M dont la distance à l'axe OA soit p et dont les distances aux axes Ox', Oy' et Oz' soient ξ', η' et ζ', la vitesse absolue du point M, qui est la résultante des deux vitesses v et pw, dont la première est parallèle à la vitesse du point O, et la seconde est perpendiculaire au plan MOA, est aussi la résultante des six vitesses v_x, v_y, v_z, $w_x\xi'$, $w_y\eta'$, $w_{z'}\zeta'$, dont les trois premières sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, et les trois autres sont perpendiculaires aux plans MOx', MOy', MOz'. Ce corollaire doit achever de faire bien comprendre la signification du théorème précédent.

72. Cas où les deux systèmes d'axes concourants sont rectangulaires et se confondent. — Si les trois axes Ox, Oy, Oz, sont rectangulaires et se confondent avec Ox', Oy', Oz', on a les trois translations composantes

$$v_x = v\cos(v, x), \quad v_y = v\cos(v, y), \quad v_z = v\cos(v, z),$$

et les trois rotations composantes

$$w_x = w\cos(w, x), \quad w_y = w\cos(w, y), \quad w_z = w\cos(w, z).$$

Si le point O était actuellement sur l'axe central du mouvement du corps, les trois premiers cosinus auraient les mêmes valeurs absolues que les trois derniers, mais seraient de même signe ou de signes contraires.

73. Décomposition du chemin élémentaire décrit par un quelconque des points du système invariable en mouvement. — La remarque du numéro 35 s'applique à cette question. Ainsi, le chemin élémentaire absolu du point M se décompose en, 1° $v\mathrm{d}t$, dû à la translation commune, c'est-à-dire à la vitesse v du point O pris arbitrairement dans le système, et 2° $pw\mathrm{d}t$, dû à la rotation du système autour de OA, ou bien il se décompose en trois chemins $v_x\mathrm{d}t$, $v_y\mathrm{d}t$, $v_z\mathrm{d}t$, parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, et trois chemins $w_{x'}\xi'\mathrm{d}t$, $w_{y'}\eta'\mathrm{d}t$, $w_{z'}\zeta'\mathrm{d}t$, dus aux rotations autour de Ox', Oy', Oz'.

§ 4.

MOUVEMENT RELATIF, GLISSEMENT ET ROULEMENT DE DEUX CORPS SOLIDES.

74. Mouvement relatif de deux corps ou systèmes invariables. — Connaissant les mouvements absolus des deux corps, on peut se proposer de trouver quel est le mouvement de l'un d'eux relativement à l'autre pris pour système de comparaison. Cette recherche comporte deux questions, savoir :

1° La détermination des positions qu'un point quelconque choisi ou désigné du premier corps occupe relativement au second, à des instants donnés, positions dont l'ensemble constitue la trajectoire relative à ce point;

2° La détermination de la vitesse relative d'un tel point dans une de ses positions successives.

La première question n'est autre que celle qui a été traitée au numéro 25.

La deuxième est celle dont la solution est indiquée au numéro 34, lorsque la vitesse d'entraînement et la vitesse absolue du point dont il s'agit sont données. Dans le cas où elles ne seraient pas immédiatement connues, il faudrait les déduire des données de la question.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de deux systèmes désignés par S et S', dont l'un S est animé d'un mouvement composé d'une rotation représentée par OA (fig. 29), et d'une translation égale et parallèle à OV, tandis que le mouvement du système S' est composé de la rotation O'A' et de la translation O'V'. Faisant usage de l'observation du numéro 34, détruisons les vitesses du système S au moyen d'une rotation OA_1 et d'une translation OV_1 respectivement égales et opposées à OA et à OV. Dès lors, le mouvement relatif du système S' est composé de deux translations OV_1 et O'V', qui se réduisent à une seule égale et parallèle à O'V'', et des deux rotations OA_1 et O'A'. Cela étant, suivant le procédé du numéro 67, nous pourrons réduire le mouvement relatif du système S' à une rotation w_r résultante de OA_1 et de O'A', autour d'un axe passant par un point choisi à volonté, et à une translation v_r dont la grandeur et la situation angulaire dans l'espace dépendront de ce choix. Par suite, la vitesse relative d'un point situé dans le système S', à une distance p de l'axe de la rotation w_r, sera la résultante de v_r et de $w_r p$.

Si l'axe de la rotation w_r est parallèle à la vitesse v_r de la translation, ce sera l'axe central actuel du mouvement relatif du système S'. Dans le cas contraire, on pourra trouver l'axe central, comme il est dit au numéro 68, et obtenir la vitesse de glissement correspondante.

75. Mouvement relatif de deux corps qui se touchent en un point. — Lorsque deux corps solides, en mouvement relatif, sont constamment en contact, divers cas sont à distinguer, suivant qu'ils sont supposés se toucher en un point ou en plusieurs.

1° S'ils ne se touchent qu'en un point, et que ce point appartenant à la fois aux deux surfaces soit invariable sur chacune d'elles, le mouvement de l'un des corps relativement à l'autre est évidemment une rotation sphérique autour du point de contact.

2° S'ils se touchent constamment en un point, mais de manière qu'un point invariable sur l'un des corps vienne successivement coïncider avec différents points de la surface de l'autre corps, il y a entre eux un *glissement simple*. L'arc ds, décrit dans le temps dt, par le point du premier corps, sur la surface du second, est l'*arc élémentaire du glissement*. Le quotient $\frac{ds}{dt}$ est la *vitesse de glissement* à la fin du temps t.

3° Si le contact, unique à chaque instant, se déplace sur les surfaces des deux corps, il convient de considérer sur chaque surface le lieu géométrique des points qui coïncident successivement avec l'autre surface. M et M_1 (fig. 30), étant les deux points qui se confondent actuellement, et les deux lieux géométriques étant MN et M_1N_1, ces deux courbes sont tangentes en M ou M_1 au plan tangent commun aux deux surfaces. En d'autres termes, chacun a sa tangente dans ce plan. Les deux tangentes peuvent ou coïncider ou se couper. Or, si les deux lieux géométriques, MN et M_1N_1, du contact ont à chaque instant la *même tangente*, et si, de plus, les arcs de ces deux lignes parcourus simultanément par le contact sont *égaux*, il y a *roulement simple* de chacun des corps sur l'autre. La vitesse du point en contact de l'un des corps relativement à l'autre est nulle (43), et par conséquent le mouvement du premier corps relativement au second est une rotation instantanée autour d'un axe passant par le point de contact MM_1.

4° Si, les deux lieux géométriques ayant même tangente, les arcs simultanés MN et M_1N_1 (fig. 31), ou ds et ds_1, sont inégaux, la situation relative des deux corps, à la fin du temps dt, est la même que si la courbe MN commençait par rouler sans glisser

sur M_1N_1 jusqu'à ce que le point N coïncidât avec cette seconde courbe, et si ensuite l'arc MN se transportait par glissement en M'N'. Dans ce cas, qu'on peut considérer comme présentant un roulement et un glissement simultanés dans un même plan, nous dirons qu'il y a *glissement mixte tangentiel*. L'arc de glissement élémentaire pendant dt est la différence $ds_1 - ds$; et attendu que les distances des points N et M' à la courbe M_1N_1 sont des infiniment petits du second ordre, l'arc de glissement $ds_1 - ds$ est égal à la distance NN_1 qu'ont au commencement de dt les deux points qui doivent coïncider à la fin de ce temps, ou bien encore cet arc de glissement est égal à la distance M_1M' qu'auront à la fin de dt les deux points M_1 et M qui coïncident au commencement. Par conséquent, la vitesse de glissement égale à $\frac{ds_1 - ds}{dt}$ ou $\frac{MM'}{dt}$ est précisément la vitesse du point M de la courbe MN, relativement à l'autre courbe M_1N_1.

5° Enfin, si les deux lieux géométriques n'ont pas la même tangente, il y a *glissement mixte angulaire*. L'arc de glissement élémentaire pendant le temps dt est la distance NN_1 (fig. 32) qu'ont au commencement les points N et N_1 qui coïncideront à la fin. C'est donc

$$\sqrt{ds^2 + ds_1^2 - 2ds\,ds_1 \cos\alpha},$$

l'angle α étant actuellement celui des deux tangentes en M et en M_1. La vitesse de glissement s'exprime par

$$v_g = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 - 2\frac{ds}{dt}\frac{ds_1}{dt}\cos\alpha},$$

fonction de l'angle α et des vitesses avec lesquelles le contact se transporte relativement aux deux corps. Dans ce cas, comme dans les deux précédents, les deux points N et N_1 ne sont qu'à des distances infiniment petites du second ordre du plan tan-

gent en M, et la vitesse de glissement est la vitesse relative du point M de la courbe MN relativement à la courbe M_1N_1.

La dernière formule renferme, comme cas particuliers, les résultats précédents, suivant qu'on fait $\frac{ds}{dt} = 0$ et $\frac{ds_1}{dt} = 0$, ou seulement $\frac{ds_1}{dt} = 0$, ou $\alpha = 0$ et $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_1}{dt}$, ou enfin seulement $\alpha = 0$.

76. **Mouvement relatif de deux corps qui se touchent en plusieurs points.** — Ce mouvement peut toujours se ramener (74) à ce qui serait le mouvement absolu de l'un des corps pendant que l'autre serait immobile; raisonnons donc dans cette hypothèse, plus simple à concevoir. En tout point de contact, la vitesse du corps mobile, si elle n'est pas nulle, est évidemment dirigée dans le plan tangent commun aux deux surfaces. Trois cas sont alors à distinguer : l'un des corps étant fixe, l'autre peut être, à un certain instant, en translation simple, ou en rotation simple, ou en mouvement composé d'une translation et d'une rotation.

1° *Translation simple.* — Dans ce cas, toutes les vitesses de glissement aux points de contact sont égales et parallèles. Les plans tangents en ces points sont parallèles à la translation.

2° *Rotation simple.* — Si l'un des points de contact des deux corps est sur l'axe instantané de rotation du corps mobile, la vitesse de celui-ci en ce point étant nulle, il y a en ce même point roulement sans glissement. Si plusieurs points jouissent de cette propriété, ils sont par conséquent en ligne droite. Si les deux corps se touchent en des points situés hors de l'axe instantané de rotation du corps mobile, la vitesse de glissement en un point de contact, n'étant autre que la vitesse du corps mobile en ce point, est égale au produit wp de la vitesse angulaire w de ce corps, multipliée par la distance p du point considéré à l'axe instantané de rotation.

qu'il ne faut pas interpréter autrement, quand on dit que *les machines sont des appareils propres à transmettre et à transformer le mouvement.*

79. **Divers modes de liaison des corps dans les machines.** — 1° Lorsqu'une machine se réduit à un seul corps mobile en contact avec des appuis fixes, comme dans le cas du levier ou du plan incliné, les questions de cinématique qu'on peut se proposer ne présentent que des applications immédiates du chapitre précédent.

2° Une machine ou une partie de machine peut être formée de deux corps solides mobiles, assujettis à divers modes de liaison dont les cas les plus ordinaires dans la pratique et qu'il importe d'étudier d'abord sont les trois suivants :

Les deux corps ont chacun un mouvement de translation rectiligne ;

Ou l'un des corps est en translation rectiligne, tandis que l'autre tourne autour d'un axe fixe.

Ou les deux corps tournent chacun autour d'un axe fixe.

Théoriquement, ce dernier cas comprend les deux autres comme cas particuliers, puisqu'une translation peut être considérée comme une rotation autour d'un axe situé à une distance infinie dn corps dont il s'agit. En conséquence, nous nous occuperons d'abord de deux corps solides en contact et tournant autour de deux axes fixes.

Ces deux axes peuvent être parallèles,

Ou concourir en un point,

Ou n'être pas situés dans un même plan.

De là trois espèces de liaisons à examiner entre deux corps tournants en contact, en distinguant pour chacune les cas où le rapport des vitesses est variable ou constant.

3° Une machine ou un élément de machine peut consister en trois corps solides mobiles dont l'un sert de liaison aux deux autres.

4° Enfin, il peut entrer dans la composition d'une machine un corps flexible (corde, courroie, chaîne) ou un liquide servant de liaison entre deux corps solides.

C'est dans cet ordre que nous allons traiter les questions de cinématique qui se rencontrent, ou isolées, ou réunies, dans les machines. Nous indiquerons dans la seconde section l'emploi qu'on fait de ces considérations théoriques pour réaliser dans la pratique les divers genres de transformation de mouvement.

§ 1.

LIAISON DE DEUX CORPS SOLIDES EN CONTACT ET ASSUJETTIS A TOURNER AUTOUR DE DEUX AXES FIXES PARALLÈLES.

GÉNÉRALITÉS SUR CE SUJET.

80. Relations des vitesses des deux corps. — Deux corps solides étant en contact et assujettis à ne se mouvoir qu'en tournant respectivement autour de deux axes fixes parallèles, on peut se proposer et résoudre d'une manière générale cette question : *Trouver le rapport des vitesses angulaires des deux corps à l'instant où ils occupent une position donnée, et les relations de ces vitesses avec celles du glissement relatif de ces deux corps.*

L'intérêt pratique qui s'attache à cette question nous engage à exposer deux méthodes d'en obtenir la solution : l'une directe et élémentaire ; l'autre, scientifiquement préférable, qui se déduit immédiatement de la théorie de la composition des mouvements et des considérations énoncées au numéro 76, cas 2°.

PREMIÈRE MÉTHODE. — Soient M et M′ (fig. 33) deux points qui coïncident actuellement ; l'un appartient à un corps tournant autour de l'axe projeté en C, l'autre à un corps tournant autour de l'axe C′. Le plan de la figure, perpendiculaire

aux deux axes, passe par le point géométrique où se confondent M et M'. Soient NMP et N'M'P' les intersections par ce plan des surfaces qui terminent les deux corps aux environs du contact; MT est leur tangente commune.

Pendant un temps très-court, les deux corps dont les vitesses angulaires actuelles sont w et w' se déplacent très-peu, sans cesser de se toucher. Le point M décrit autour de C un petit arc de cercle MM_1, tandis que le point M' décrit l'arc $M'M_1'$ autour de C'. A la limite, ces deux arcs peuvent être considérés comme des droites respectivement perpendiculaires à CM et à C'M'. A la fin de ce déplacement infinitésimal, le plan tangent en M_1 à la surface qui a tourné autour de l'axe C fait un angle infiniment petit avec sa position initiale, c'est-à-dire avec le plan tangent en M; et puisque les deux courbes roulent en glissant l'une sur l'autre, le point M_1' n'est qu'à une distance infiniment petite du second ordre du plan tangent en M_1. Donc, la petite droite M_1M_1' est, à la limite, parallèle au plan tangent en M, et par conséquent à la tangente TM. Si donc on mène dans le plan de la figure la normale MI, les trois côtés du triangle infinitésimal M_1MM_1' sont respectivement perpendiculaires à MC, à MC' et à MI. D'ailleurs, ils sont proportionnels aux vitesses $w\cdot CM$, $w'\cdot C'M$ des points M et M', et à la vitesse de glissement v_g des deux corps. Cela étant, pour former un triangle dont les côtés soient parallèles à ceux du triangle infinitésimal, on mène IL parallèle à C'M : on a deux triangles semblables MIL, MM_1M_1', et

$$\frac{MM_1'}{IL}=\frac{MM_1}{ML}=\frac{M_1M_1'}{MI} \quad \text{ou} \quad \frac{w'\cdot MC'}{IL}=\frac{w'\cdot MC}{ML}=\frac{'v_g}{MI};$$

or

$$\frac{MC'}{IL}=\frac{CC'}{IC'} \quad \text{et} \quad \frac{MC}{ML}=\frac{CC'}{IC},$$

donc

$$\frac{w' \cdot CC'}{IC} = \frac{w \cdot CC'}{IC'} = \frac{v_g}{MI} = \frac{CC'(w' + w)}{IC + IC'};$$

donc

$$w \cdot IC = w' \cdot IC' \quad \text{et} \quad v_g = MI(w + w').$$

Ainsi, les deux vitesses angulaires w et w' sont réciproquement proportionnelles aux distances des axes C et C', à l'intersection de la normale MI avec la droite CC'. Elles sont dans le même rapport que si les deux corps se touchaient en I sur cette droite. La vitesse de glissement est celle qu'aurait le point M si la normale MI tournait autour du point I avec la vitesse angulaire $w + w'$. Cette vitesse est nulle quand le contact est dans le plan des deux axes, et seulement alors.

Remarquons que la droite MI peut n'être pas la normale commune aux deux surfaces qui se touchent en A. Mais elle est, sur le plan de la figure, la projection rectangulaire de cette normale, qui est, comme MI, perpendiculaire à la tangente MT. Ainsi, la relation $w \cdot IC = w' \cdot IC'$ peut s'énoncer en disant que *les vitesses angulaires w et w' sont réciproques aux distances des axes* C *et* C' *à la rencontre de la normale avec le plan de ces deux axes.*

Seconde méthode. — Les deux corps étant situés comme l'indique la figure 33, les rotations autour de C' et de C sont de sens contraires; savoir w et $-w'$. Si nous considérons le mouvement du corps lié à l'axe C et à la courbe NMP, relativement à l'autre corps pris pour système de comparaison, nous voyons que ce mouvement relatif est une rotation instantanée w_1 résultante de w, rotation absolue de CM et de w', rotation d'entraînement prise en sens contraire de $-w'$, (34); donc (63) $w_1 = w + w'$, et l'axe instantané de cette rotation relative contient tous les points tels que I qui divisent la distance CC' [en deux parties

réciproques aux vitesses angulaires w et w'. De plus, la vitesse de glissement en M, étant aussi la vitesse relative du point M, est égale au produit $MI \cdot w_1$; et cette vitesse étant tout à la fois dirigée suivant la tangente TM (parce qu'elle est vitesse de glissement), et suivant la perpendiculaire au rayon MI de la rotation relative (parce qu'elle est vitesse relative), il s'ensuit que la droite MI est normale aux deux courbes NMP, N'M'P'.

81. Remarques. — 1° La relation $w \cdot IC = w' \cdot IC'$ est celle du numéro 55 trouvée dans une question qui a en effet la plus grande analogie avec celle dont nous venons de nous occuper. Pour le reconnaître, il suffit de considérer les courbes NMP et N'M'P' (fig. 33) comme deux cercles qui, se touchant en M, ont leurs centres en O et O' sur la normale commune MI. Il est clair que, pendant que ces cercles, sans cesser de se toucher, tournent, l'un autour de C, l'autre autour de C', la distance OO' reste constante, et par conséquent (55) leurs vitesses angulaires sont dans le rapport inverse des distances CI et C'I.

2° Si, au lieu de tourner en sens contraires, les deux corps tournent dans le même sens, les relations précédemment démontrées subsistent eu égard aux signes des quantités qui y entrent.

Les côtés MM_1, MM'_1 et $M_1M'_1$, (fig. 34) du triangle infinitésimal $MM_1M'_1$ sont proportionnels aux vitesses linéaires $w \cdot MC$, $w' \cdot MC'$, v_g, et aux côtés du triangle MLI qui leur sont respectivement perpendiculaires. On a donc

$$\frac{w \cdot MC}{ML} = \frac{w' \cdot MC'}{IL} = \frac{v_g}{IM}.$$

Or, à cause des parallèles MC' et IL, on a aussi

$$\frac{MC}{ML} = \frac{CC'}{IC'} \quad \text{et} \quad \frac{MC'}{IL} = \frac{CC'}{IC};$$

donc

$$\frac{w\cdot CC'}{IC'}=\frac{w'\cdot CC'}{IC}=\frac{v_g}{IM}=\frac{(w-w')\,CC'}{IC'-IC};$$

donc

$$w\cdot IC=w'\cdot IC \quad \text{et} \quad v_g=(w-w')\,IM.$$

Les vitesses angulaires qui, dans ce cas, sont de même sens, étaient de sens contraire dans le cas de la figure 33, et il en est de même des distances du point I aux deux centres C et C'. C'est ce qui explique pourquoi l'une des deux dernières équations subsiste sans changement, tandis que l'autre diffère de son analogue par le changement du signe d'une des vitesses angulaires.

On arriverait aux mêmes résultats par la seconde méthode.

82. **Cas particulier d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à l'axe.** — Un des deux corps tourne avec une vitesse w autour de l'axe C (fig. 35). L'autre a une vitesse de translation v perpendiculaire à cet axe, et par conséquent parallèle au plan de la figure. M et M' sont deux points de ces corps qui coïncident actuellement; NMP et N'M'P', les intersections du plan de la figure avec les surfaces qui terminent les deux corps. Au bout du temps dt, M et M' sont venus en M_1 et M'_1. On a

$$MM_1=w\cdot CM\cdot dt, \quad AA_1=v\,dt, \quad A_1M_1=v_g\,dt.$$

La normale MI, commune aux deux courbes, est perpendiculaire à M'_1M_1; et si l'on mène CI perpendiculaire à la direction $M'M'_1$ de la vitesse v, les deux triangles MCI et $M_1M'M'_1$ sont semblables; donc

$$\frac{w\cdot CM}{CM}=\frac{v}{CI}=\frac{v_g}{MI}; \quad \text{donc} \quad v=w\cdot CI, \quad \text{et} \quad v_g=w\cdot MI.$$

Ces formules se déduisent des relations précédentes

$$w \cdot CI = w' \cdot C'I \quad \text{et} \quad v_g = (w + w')\,MI,$$

en remarquant que, à mesure que C'I augmente, d'une part le produit $w'C'I$, vitesse du point I considéré comme lié à la courbe N'M'P', approche de v, et d'autre part la vitesse angulaire w' approche de sa limite zéro.

83. Cas particulier de deux translations. — Par le point actuel de contact des deux corps, menons un plan parallèle aux deux translations, qui coupe les deux corps suivant les courbes NMP, N'M'P' (fig. 36), v et v' étant leurs vitesses, au bout du temps dt, le point M est venu en M_1, à une distance $MM_1 = v\,dt$; le point M' en M'_1, à une distance $M'M'_1 = v'\,dt$; les deux points M_1 et M'_1 sont à la limite sur une droite parallèle à la tangente MT. De là on conclut, en désignant par la seule lettre T la direction de cette tangente,

$$\frac{v}{MM_1} = \frac{v'}{M'M'_1} = \frac{v_g}{M'M'_1},$$

d'où

$$\frac{v}{\sin(v', T)} = \frac{v'}{\sin(v, T)} = \frac{v_g}{\sin(v, v')}.$$

Ces relations sont des conséquences immédiates de la théorie de la composition des vitesses, l'une des vitesses v et v' pouvant être considérée comme vitesse d'entraînement, l'autre comme vitesse absolue, et v_g suivant la tangente étant alors vitesse relative.

CAS OU LE RAPPORT DES DEUX ROTATIONS EST CONSTANT. CYLINDRES ROULANTS. ENGRENAGES.

84. Cylindres roulants ou de friction. — Deux corps de

forme cylindrique à bases circulaires (fig. 37) sont assujettis à ne se mouvoir qu'en tournant autour de leurs axes fixes et parallèles. Ils sont pressés mutuellement, de manière qu'ils roulent sans glisser l'un sur l'autre lorsqu'ils sont mis en mouvement par un moteur quelconque.

Si r et r' sont leurs rayons, w et w' leurs vitesses angulaires, la vitesse commune des points en contact donne immédiatement la relation

$$wr = w'r'.$$

Suivant que les cylindres sont extérieurs l'un à l'autre, ou que le petit est intérieur au grand (qui est alors un cylindre creux), les rotations w et w' sont de sens contraires ou de même sens.

Ce moyen de communication de mouvement n'est propre qu'à transmettre de légers efforts ou à un emploi accidentel, à cause des frottements que de grandes pressions occasionnent entre les deux corps tournants et leurs appuis.

85. Engrenages cylindriques ou droits. Engrenage extérieur (fig. 38). **Engrenage intérieur** (fig. 39). — Dans la plupart des cas, les *roues d'engrenage* remplacent avantageusement les cylindres roulants ; les saillies ou dents dont elles sont armées et qui se pressent mutuellement déterminent à chaque instant le rapport des vitesses angulaires des deux arbres sur lesquels elles sont fixées (80). Le problème à résoudre ici est de donner, aux dents des deux roues qui engrènent, une figure d'où il résulte que ce rapport de vitesses soit constant, comme si la communication de mouvement avait lieu par deux cylindres roulant sans glissement l'un sur l'autre. Les cercles tangents entre eux, qui sont les bases de ces cylindres, s'appellent *cercles primitifs*. Leurs rayons proportionnels aux nombres de dents également espacées des deux roues sont réciproquement proportionnels aux vitesses angulaires ou aux nombres de tours accomplis dans un même temps.

Les dents des engrenages à axes parallèles sont ordinairement terminées par des surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles aux axes de rotation des roues. Il suffit donc alors d'étudier la figure des dents dans une section perpendiculaire à ces axes ; cette figure des dents est ce qu'on appelle leur *profil*.

86. **Le profil d'une dent sur une roue est l'enveloppe des diverses positions qu'une dent de l'autre roue prend relativement à la première.** — Le mouvement relatif des deux roues est le même que si l'un des cercles primitifs était fixe, l'autre roulant, sans glisser, en *sens contraire* du mouvement qui a réellement lieu à l'endroit du contact de ces deux cercles. On voit, d'après cela, que le problème ci-dessus énoncé a théoriquement une infinité de solutions. Si on ne le considérait qu'au point de vue géométrique, on pourrait prendre pour la dent d'une des roues un profil quelconque. Qu'on fasse, en effet, rouler le cercle primitif de la roue armée de cette dent sur le cercle primitif de l'autre roue ; la dent donnée prendra diverses positions auxquelles sera tangent le profil cherché de la dent de la seconde roue ; il sera leur *enveloppe*. Mais il est à remarquer que, dans la pratique, le choix du profil enveloppé ne peut être tout à fait arbitraire, parce qu'il est nécessaire que la courbe enveloppe ne présente ni rebroussement ni point multiple.

87. **Propriété fondamentale.** — Avant d'aborder les détails relatifs à la distribution des dents sur leurs roues, à leur nombre, à leurs dimensions en tous sens, nous allons nous occuper de la détermination des courbes par lesquelles ces dents se touchent mutuellement, sans préciser quant à présent les points où elles se terminent. Ces courbes, que nous désignerons souvent sous le nom de *profils de contact*, doivent toujours satisfaire à une propriété qui découle de la proposition démontrée au numéro 80 : *Pour que les vitesses angulaires soient dans un rapport constant,*

il faut et il suffit que la normale commune aux deux courbes en contact dans une position quelconque passe par le point de contact des deux cercles primitifs, puisque ce point divise la distance des centres en segments réciproques aux vitesses angulaires.

88. **Premier procédé général pour déterminer les profils de contact des engrenages.** — Etant donnée la courbe **mn** (fig. 40) adoptée pour une dent fixée à la roue **C** (*), on peut trouver celle qui convient à la dent correspondante de l'autre roue **C'**.

Plaçons la courbe donnée dans une position quelconque relativement au point **A** commun aux deux cercles primitifs. Soit **Aa** la plus courte distance de **A** à la courbe **mn**. Si l'on fait arc **AB'** = arc **AB**, les deux points **B** et **B'** doivent coïncider, quand, en faisant tourner à droite de **A** les deux roues, ou rouler à gauche l'une sur l'autre restée fixe, on amène **B** au contact des deux cercles. On a ainsi deux points **a** et **B'** de la courbe cherchée. La droite **aA** est sa normale en **a**, et on aura la normale en **B'**, si l'on trace par **B'** une droite faisant avec le prolongement du rayon **C'B'** un angle **P'B'N'** égal à l'angle **CBN** que la normale en **B** à **mn** fait avec le rayon **BC**.

Pour avoir un point intermédiaire, prenons entre **a** et **B** sur **mn** un point **d** et menons la normale **dD**; lorsque **dD** sera la normale commune aux deux courbes, **D** coïncidera avec **D'** déterminé en faisant arc **AD'** = arc **AD**. Donc, si, prenant **D'** pour centre, on décrit un arc de cercle avec le rayon **D'd'** = **Dd**, cet arc sera tangent à la courbe cherchée. Si même on trace **D'd'** faisant avec le prolongement du rayon un angle égal à **CDd**, on aura en **d'** le point cherché de la seconde courbe.

On voit aisément comment on obtiendrait des points tels que **e** et **e'** devant coïncider en même temps que les deux points

(*) Afin d'abréger, nous disons la roue **C** ou le cercle **C** pour la roue ou le cercle dont l'axe ou le centre est **C**. Quand il y a lieu de désigner plus complétement un cercle, nous disons le cercle **CA** pour le cercle dont le centre est **C** et le rayon **CA**.

E et E′ des cercles primitifs, et les deux points f et f′ qui coïncideront en même temps que F et F′.

Un petit nombre de points ainsi déterminés, avec la direction de la normale et par conséquent de la tangente pour chacun d'eux, fourniraient un bon moyen de solution graphique (*); mais

(*) Ajoutons même que, ce qui serait théoriquement bien préférable, on pourrait en chaque point déterminé, tel que les points a, d′, f′,... de la courbe cherchée calculer, le rayon de courbure de cette courbe.

Pour cela appliquons les constructions précédentes à un point a_1 infiniment voisin de a sur la courbe mn. La normale ca_1 en ce point rencontre la circonférence primitive C en A_1; et lorsque, par le roulement de cette circonférence sur la circonférence C′ supposée fixe, le point A_1 arrivera en A'_1 (déterminé par la condition $AA'_1 = AA_1$), la droite a_1A_1 venue en $a'_1A'_1$ sera la normale commune aux deux profils. La rencontre en X des deux normales infiniment voisines Aa et A_1a_1 détermine le rayon de courbure aX de la courbe d′af′, de même que la rencontre en c des deux normales en a et en a_1 à la courbe mn détermine le rayon de courbure ac de cette courbe. Cela étant compris, soient

$$aX = \rho, \quad ac = r, \quad Aa = n, \quad \text{angle } aAC = \varphi, \quad AC = R, \quad AC' = R'.$$

Il s'agit de trouver la relation qui lie ces six quantités.

A cet effet, on remarque que, pendant que la circonférence primitive mobile passe du contact en A au contact en A_1 avec la circonférence fixe, toutes les lignes de la figure mobile auront tourné d'un même angle. Ainsi, A_1a_1 venant en $A'_1a'_1$ aura tourné du même angle que le rayon A_1C venant dans la direction et en prolongement de $C'A'_1$.

Or, d'une part l'angle de A_1a_1 avec $A'_1a'_1$ (extérieur au triangle que ces droites prolongées formeraient avec cX), est égal à la somme des deux angles AcA_1 et AXA'_1, ce qu'on peut, attendu que AA_1 égal à AA'_1 est infiniment petit, exprimer ainsi :

$$\text{angle } (A_1a_1, A'_1a'_1) = \frac{AA_1 \cos\varphi}{r+n} + \frac{AA_1 \cos\varphi}{\rho - n}.$$

D'autre part, l'angle de A_1C avec $C'A'_1$ (extérieur au triangle que ces droites font avec CC′), est égal à la somme $ACA_1 + AC'A'_1$, ce qui se formule ainsi :

$$\text{angle } (A_1C, C'A'_1) = \frac{AA_1}{R} + \frac{AA_1}{R'}.$$

si l'on prenait au hasard la première courbe, on risquerait, suivant la remarque déjà faite (86), de rencontrer des impossibilités pratiques dont on verra plus loin des exemples.

89. Deuxième procédé général pour déterminer les profils des engrenages. Courbes épicycloïdales. — Soient C et C′ (fig. 41) les centres des deux cercles primitifs. Soit, en outre, une courbe quelconque TN qui les touche en T. Imaginons que, le cercle C′ étant fixe, le cercle C roule sur lui, et qu'en même temps la courbe TN roule également sans glisser, de manière que les trois courbes aient continuellement le même point de contact. Pendant ce roulement, un point quelconque M, qu'on suppose invariablement lié à la courbe TN et qui peut n'être pas situé sur cette courbe, décrit sur le plan fixe du cercle C′ une courbe MA′; et en même temps, dans son mouvement relatif au cercle C et sur le plan mobile de ce cercle, il décrit une courbe MA. Ces deux courbes MA′ et MA ayant à chaque instant le point commun M, ont aussi en ce point une même normale (43) passant au contact commun T des deux cercles. Si, à partir d'une position déterminée, telle que celle de la figure ci-contre, le roulement se fait à gauche, les points des courbes MA, MA′ obtenus seront les points successifs de contact pendant le mouvement des dents à droite autour des centres fixes C, C′. *La disposition relative des deux courbes montre quelle est*

En égalant ces deux expressions d'un même déplacement angulaire, on obtient :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \cos\varphi \left(\frac{1}{r+n} + \frac{1}{\rho - n}\right).$$

Cette formule, qui paraît due à M. Savary, professeur à l'Ecole polytechnique de 1831 à 1841, est reproduite par M. Duhamel dans ses *Eléments de calcul infinitésimal*. Elle servira à trouver le rayon de courbure ρ en fonction des quantités R, R', r, n et $\cos\varphi$. Par exemple, pour calculer le rayon de courbure au point **d′** de sa courbe **B′af′**, on fera $n = \mathbf{D'd'} = \mathbf{Dd}$, $\varphi = \mathbf{CDd}$, et r égal au rayon de courbure de la courbe **mn** au point **d**.

celle des deux roues qui dans ce mouvement doit nécessairement pousser l'autre, par exemple, dans le cas de la figure, si le mouvement autour de C et C′ a lieu dans le sens des flèches, la dent terminée par MA ne peut que pousser celle que termine la courbe MA′ : la roue C est mouvante ou conductrice ; la roue C′ est résistante ou conduite. Ce serait tout le contraire si l'on faisait tourner les roues en sens contraire des flèches. Dans le premier cas, les surfaces des deux dents MA, MA′ se touchent en M, *avant d'arriver à la ligne des centres ;* dans le second cas, c'est *après y être passées.*

Ici s'applique encore la réserve énoncée précédemment (86 et 88) : si l'on donnait aux courbes MA et MA′, dont la génération vient d'être définie, une trop grande étendue, il pourrait s'y trouver des points singuliers qui en rendraient l'emploi impossible.

90. Remarque. — Les deux procédés indiqués (88 et 89) ne conduisent pas à des solutions essentiellement distinctes ; c'est ce qui résulte de la proposition suivante :

Quelle que soit une courbe **man** (fig. 42) *dont les normales rencontrent une autre courbe* **MAN**, *il est toujours possible de trouver une troisième courbe* **M′A′N′** *touchant la deuxième en un point donné* **A**, *et qui soit telle que, pendant qu'elle roule sur cette deuxième courbe en entraînant le point* **a**, *pied de la normale menée de* **A** *sur* **man**, *ce point* **a** *décrive la courbe* **man**.

En effet, soient **bB**, **cC**... des normales à la courbe **man** infiniment voisines de **aA**. Imaginons qu'une figure quelconque liée au point **a** tourne autour de **A** comme centre instantané, jusqu'à ce que son point **a** ait décrit le petit arc **ab** perpendiculaire à **Aa** ; que, le point **a** étant ainsi parvenu en **b**, la même figure tourne autour de **B**, de sorte que son point **a** décrive le petit arc **bc**, ainsi de suite. Donc, la figure invariable, mais mobile, dont il s'agit décrit par l'un de ses points la courbe **man**, et elle a, dans son mouvement, tous ses centres instantanés de rotation

sur MAN ; ce qui, d'après le numéro 47, permet de conclure la proposition actuelle (*).

Ainsi, la courbe **man** quelconque, choisie pour l'application du premier procédé, peut toujours être engendrée par le deuxième.

91. Glissement de deux dents d'engrenage. — Quels que soient les profils **eBaf** et **e'B'a'f'** de deux dents en contact (fig. 40), si l'on appelle n la distance **aA** du point de contact **a** au point **A** où passe constamment la normale, en désignant par v_g la vitesse actuelle du glissement mutuel des deux courbes, par v la vitesse linéaire commune des circonférences primitives, par R et R' les rayons **CA** et **C'A** de ces circonférences, on a immédiatement, d'après le numéro 80,

$$v_g = nv\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Ainsi, les deux courbes ne roulent sans glisser l'une sur l'autre qu'à l'instant où leur contact a lieu sur la ligne des centres, qu'atteignent simultanément les deux points **B** et **B'**. La différence des arcs **B'a** et **Ba** mesure le glissement total pendant que les circonférences primitives parcourent les arcs égaux **B'A** et **BA**. La moyenne arithmétique des valeurs extrêmes de la vitesse de glissement pendant ce parcours est

$$\frac{1}{2}nv\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

Ces propriétés géométriques nous serviront plus tard à apprécier l'influence du frottement des engrenages.

(*) Si l'on veut se figurer la détermination graphique de la courbe **M'N'**, les arcs **AB**, **BC**,... étant très-petits, et considérés comme rectilignes, on construit le triangle **B'Aa** en faisant **AB' = AB** et **aB' = bB**, puis le triangle **C'B'a** en faisant **B'C' = BC** et **aC' = cC**, et ainsi de suite.

92. Profils de contact pratiques des engrenages. — Le problème des engrenages cylindriques a reçu dans la pratique trois genres de solution distincts.

Première solution pratique. Engrenage à lanterne ou à fuseaux cylindriques. — La coupe ou profil des dents d'une des roues C (fig. 43) est un cercle dont le centre est sur la circonférence primitive. Ces dents prennent le nom de *fuseaux*, et la roue s'appelle dans ce cas une *lanterne*. La figure représente, non divers fuseaux d'une même roue, mais diverses positions successives d'un seul et même fuseau. Les roues étant supposées tourner dans le sens indiqué par les flèches, la position O de l'axe du fuseau est celle où sa circonférence passe par le point A de contact des cercles primitifs, le centre O étant au delà de la droite CC′ appelée ligne des centres des deux roues. Dans la position O_1 le fuseau est *au delà* de cette ligne des centres; la position o est une de celles où le fuseau doit passer avant d'arriver à la position O.

Si l'on veut que la roue C′ mène l'autre pendant que le fuseau passe de O en O_1, il faut qu'elle soit armée d'une dent dont la courbe soit d'abord comme AB tangente en A au cercle O et vienne ensuite en A_1B_1 pour être tangente au cercle O_1 au point B_1 situé sur la droite O_1A. Le point A_1 est déterminé par la condition que l'arc AA_1 sur le cercle C′ est égal à l'arc OO_1, sur le cercle C, puisque, pendant qu'un point quelconque tel que O du cercle C décrit l'arc OO_1, il faut qu'un point quelconque, par exemple le point A, du cercle C décrive un arc de même longueur.

Cet aperçu montre comment on pourrait obtenir autant de points qu'on voudrait de la courbe AB, en considérant autant de positions diverses du fuseau au delà de la ligne des centres. Mais on construit plus simplement cette courbe en faisant usage du principe posé au numéro 86 : on remarque que le cercle C qui porte le fuseau, roulant à gauche sur le cercle C, le centre O

décrit relativement à celui-ci un arc d'épicycloïde OM, d'où il est facile de conclure la courbe enveloppe AB.

L'exécution graphique de l'épicycloïde OM peut se faire ainsi (*) : O étant pris pour point décrivant, sur le cercle C actuellement tangent en A au cercle C', on détermine l'origine N en faisant l'arc AN de même longueur que l'arc AO ; puis pour avoir un point M de l'épicycloïde situé sur un arc donné PM tracé autour de C, on fait l'arc NQ de même longueur que l'arc AP et l'on détermine M par la condition que les distances rectilignes QM et AP soient égales. Non-seulement l'épicycloïde est ainsi construite par points, mais on a en chacun de ces points tels que M sa normale MQ. On pourra même trouver pour le point quelconque M son rayon de courbure MF $= \rho$, soit par la formule (**)

$$\rho = n + \frac{nR'}{R' + 2R},$$

dans laquelle R et R' sont les rayons AC et AC', et n est la distance du point M dont il s'agit au point où la normale coupe la circonférence, ainsi $n =$ AP ou MQ ; soit par une construc-

(*) Nous rappelons ici le procédé général pour construire une épicycloïde (fig. 44).

On donne : 1° l'origine N de l'épicycloïde ; 2° une position quelconque du cercle générateur C.

En faisant l'arc AP'M' de même longueur que AN, on obtient le point M'. Supposons qu'on veuille avoir le point M sur l'arc circulaire MP décrit autour du centre C'. Pour l'obtenir on fait : 1° arc NQ = arc AP' ou AP ; 2° la distance QM = corde AP, sans décrire le cercle C, indiqué seulement pour la démonstration.

On pourrait aussi faire arc AQ' = arc AP' et corde NM = Q'P'.

(**) Cette formule se déduit de celle qui termine la note du numéro 88, quand on y fait : 1° $r = 0$, c'est-à-dire qu'on réduit la courbe mam à un point unique ; 2° $\cos\varphi = \frac{n}{2R}$, c'est-à-dire que ce point est sur la circonférence C.

tion graphique consistant à faire SD = AP et à mener DC′ rencontrant PA prolongé en E, ce qui donne le rayon de courbure PE qu'on porte de M en F, centre de courbure (*).

L'épicycloïde étant supposée tracée, on en conclut la courbe AB en portant sur ses normales du côté de sa concavité le rayon du fuseau, de sorte que cette courbe AB et l'épicycloïde NM ont une même développée. Or, on sait que la développée d'une épicycloïde est une épicycloïde semblable à la première (*). Donc, la courbe AB (dont la tangente en A est AT perpendiculaire à OA, et déterminée en faisant ST = AO), a en dedans du cercle C′, au-dessous et près de A, un rebroussement situé sur l'épicycloïde développée de NM au point dont la distance à MN est égale au rayon du fuseau. Il est évident que le profil d'une dent ne peut avoir un rebroussement; ainsi, la courbe convexe AB et son prolongement intérieur au cercle C′ jusqu'au rebroussement, et non au delà, peuvent seuls former le profil de la dent qui, fixée sur la roue C′, doit pousser le fuseau dans le sens des flèches. Si le mouvement a lieu dans ce sens, le contact devra commencer au point de rebroussement géométrique dont nous venons de parler, un peu avant que le fuseau prenne la position O (**); bientôt le fuseau dépassera la ligne

(*) Voir, à la suite de ce Traité, la note sur les épicycloïdes planes.

(**) On peut déterminer très-approximativement la distance entre la ligne des centres et le point de rebroussement, origine du profil de la dent, à l'instant où commence le contact de cette dent et du fuseau. Soit X (fig. 45) le point de rebroussement à cet instant. La normale en ce point, commune à la dent et au fuseau, passe au point de contact A des cercles primitifs et au centre O du fuseau. La distance OX est tout à la fois le rayon du fuseau et le rayon de courbure de l'épicycloïde NO au point O; désignons-la donc par ρ. La distance AO est celle qui, dans la formule citée dans le texte,

$$\rho = n + \frac{nR'}{R' + 2R},$$

est désignée par n, et la distance AX, égale à $\rho - n$, est à très-peu près la distance cherchée, parce que l'angle de XO avec la ligne des centres

des centres CC′ et sera poussé par la partie AB de la dent, extérieure au cercle primitif C′.

Supposons maintenant que, le fuseau ayant été poussé jusqu'en O_1 par cette courbe transportée en A_1B_1, on le fasse rétrograder et pousser à son tour la même courbe de A_1B_1 en AB. Il est évident que la condition du rapport invariable des vitesses angulaires, ou du passage constant de la normale commune par le point de contact primitif A, reste remplie, et qu'elle l'est encore si l'on continue tant soit peu le mouvement rétrograde jusqu'à ce que le fuseau touche la courbe en son point de rebroussement géométrique au-dessous de A. Mais ensuite, si l'on fait rétrograder encore les deux roues, en conservant le rapport de leurs vitesses angulaires, le même que si les cercles primitifs roulaient l'un sur l'autre sans glisser, le contact cessera. Par exemple, supposons que la courbe liée à la roue C′ passe de AB en ab. Nous trouverons la position correspondante o du fuseau en faisant l'arc Oo égal à l'arc Aa. Or, la figure montre qu'alors le fuseau ne peut pas mener régulièrement la dent convexe ab, puisque aucune des normales de celle-ci ne passe au point A; elle montre d'ailleurs que la courbe AB est entièrement en dehors et à gauche du fuseau, de sorte qu'elle n'empêche pas le mouvement régulier des deux roues.

diffère très-peu d'un angle droit (si dans la figure il en diffère sensiblement, ce n'est que parce que la grandeur OX du rayon du fuseau y est exagérée pour éviter la confusion des lignes). Or, la formule précédente donne

$$\frac{\rho - n}{R'} = \frac{n}{R' + 2R} = \frac{\rho}{2R' + 2R} \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho - n}{\rho} = \frac{R'}{2R' + 2R}.$$

Tel est le rapport de la distance AX cherchée au rayon ρ du fuseau. Suivant qu'on fait

$$\frac{R'}{R} = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ \infty,$$

on trouve

$$\frac{\rho - n}{\rho} = \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{5},\ \ldots\ \frac{1}{2}.$$

Concluons que, si la lanterne mène l'autre roue, le contact des fuseaux de la première et des dents de la seconde a lieu principalement avant la ligne des centres; il finit près et au delà de cette ligne. Si, au contraire, la lanterne est menée par l'autre roue, et c'est le cas ordinaire, le contact a lieu principalement au delà de la ligne des centres, en commençant près et en deçà de cette ligne (*).

93. Deuxième solution pratique. Engrenages à dents épicycloïdales. — On applique ici la théorie du numéro 89; à cet effet on prend le plus souvent pour la courbe TN (fig. 46) la circonférence dont le diamètre est le rayon TC de l'un des cercles primitifs, et le point décrivant M est pris sur cette même

(*) Pour parler avec plus de précision, supposé que, comme cela doit être en général, le diamètre de la lanterne soit plus petit que celui de l'autre roue; la distance à la ligne des centres du point où commence le contact (quand la lanterne est menée), est au rayon du fuseau dans un rapport qui varie de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$: (voir la note précédente).

Les auteurs qui, à ma connaissance, ont traité de l'engrenage à lanterne, ont inexactement indiqué la situation du fuseau de la lanterne) à l'instant où commence son contact avec une dent de l'autre roue.

M. Willis, page 76 de ses *Principles of mechanism*, dit que « le premier contact a lieu lorsque le centre du fuseau atteint la ligne des centres. »

Cette erreur est aussi celle de Le Blanc, auteur d'un ouvrage estimé sur le dessin des machines.

Leroy, auteur d'un excellent Traité de géométrie descriptive, adoptant l'opinion précédemment émise par Savary, prescrit de borner le profil courbe des dents à la partie extérieure au cercle primitif de la roue, et de prolonger ce profil à l'intérieur, suivant la direction du rayon. Il en résulterait deux conséquences désavantageuses : l'une, que le profil présenterait un angle saillant, une arête à la vérité obtuse mais sensible; l'autre, que le contact ne commencerait que sur la ligne des centres, à l'instant où l'origine de la dent atteindrait cette ligne.

Du reste, les erreurs que nous relevons ici n'ont guère qu'un intérêt théorique, parce que l'emploi des engrenages à lanterne est généralement et justement abandonné.

circonférence : la courbe **MA** devient un rayon du cercle **C** (*); la surface plane **MA** s'appelle *flanc;* la courbe **MA'** devient un arc d'épicycloïde.

Des considérations indiquées au numéro 89 on conclut, 1° que, dans le mouvement des dents vers la ligne des centres (dans le sens des flèches), le flanc **MA** de la dent de **C**, intérieur à son cercle primitif, pousse ou conduit la face épicycloïdale **MA'** de la dent de **C'** extérieure à son cercle primitif; 2° qu'au contraire le flanc **MA** serait poussé par la face épicycloïdale **MA'**, si les dents auxquelles appartiennent ces profils se mouvaient au delà de la ligne des centres (dans le sens opposé à celui des flèches); 3° que, pour que le contact de deux mêmes dents commence avant la ligne des centres et finisse au delà de cette ligne, il suffit que chaque dent ait un profil *mixte* formé d'un flanc intérieur à son cercle primitif et d'une partie épicycloïdale extérieure, engendrée par un cercle dont le diamètre est égal au rayon du cercle primitif de l'autre roue. Ainsi, par exemple, les roues **C** et **C'** tournent de **A** vers A_1 et de **A'** vers A_1', la dent **MAm** de la roue **C** dans la position de la figure presse par le point **M** de son flanc la dent **MA'm'** de la roue **C'**; et plus tard la première dent venue, par exemple, en $M_1A_1m_1$ presse par le point m_1 de sa face courbe le flanc de la deuxième dent venue en $M'_1A'_1m_1$. On voit que pendant le transport des dents, de l'une à l'autre de ces positions, leur point géométrique de contact décrit dans l'espace d'abord l'arc **MT** du cercle **CMT**, pendant que le flanc de la roue **C** pousse la face courbe de la roue

(*) Si l'on joint **A** et **M** à **C** par deux droites, les angles **TCA** et **TCM** ont respectivement pour mesure $\frac{AT}{CT}$ et $\frac{\frac{1}{2}TM}{\frac{1}{2}CT}$; donc, si **AT** et **TM** sont égaux, les angles le sont aussi; les trois points **A**, **M**, **C** sont en ligne droite.

C', puis l'arc Tm_1 du cercle Tm_1C', pendant que la face courbe de la première roue pousse le flanc de la seconde.

Deux roues à flancs intérieurs plans et à courbes épicycloïdales extérieures aux cercles primitifs doivent, d'après la génération de leurs profils, être faites spécialement l'une pour l'autre, de sorte qu'une même roue ne peut pas engrener régulièrement avec deux roues de diamètres différents. On évite cet inconvénient pour une série de roues qu'on veut pouvoir faire engrener avec une même roue, en remplaçant dans les roues de la série les flancs droits par des courbes : on choisit pour cercle générateur de ces courbes intérieures et de la courbe extérieure correspondante de la roue unique un cercle constant dont le diamètre diffère le moins possible des rayons des roues de la série.

94. Troisième solution pratique. Engrenages à développantes de cercles. — Cette solution est fondée directement sur la condition qui veut que la normale commune aux profils des dents passe constamment par un même point commun aux deux circonférences primitives. Un caractère remarquable par lequel elle diffère de la solution précédente, c'est que la normale commune conserve une position fixe dans l'espace pendant le mouvement des deux roues autour de leurs axes respectifs. Soit TAT' (fig. 47) cette normale commune. On trace les circonférences dont les rayons sont les perpendiculaires CT, C'T', et l'on prend pour profil des dents les développantes de ces circonférences, de sorte que M étant le point actuel de contact, et B l'origine du profil BMN appartenant à roue C, on a

$$\text{arc TB} = \text{TM} \quad \text{et} \quad \text{PN} = \text{arc PB}.$$

De même, pour l'autre roue,

$$\text{arc T'B'} = \text{T'M} \quad \text{et} \quad \text{P'N'} = \text{arc P'B'}.$$

Il est aisé de voir que, dans quelque sens que tournent les

deux roues en se pressant mutuellement, entre l'instant où le point mobile B de la roue C est au point T fixe dans l'espace, et l'instant où le point B′ de la roue C′ est au point fixe T′, les deux mêmes courbes se toucheront en un point de la droite TT′ et l'auront pour normale. On voit de plus que, pendant que le point B parcourra un arc quelconque ayant le rayon CT, le point M de contact avancera de la même longueur sur TT′, et le point B′ de la même quantité sur la circonférence ayant le rayon C′T′, ce qui démontre *à posteriori* que les vitesses angulaires sont réciproques aux distances CT, C′T′ ou aux distances CA, C′A.

Les avantages spéciaux de ce système d'engrenage sont : 1° qu'une même roue peut engrener régulièrement avec plusieurs autres de diamètres différents entre eux; 2° que, pour deux roues dentées données, la distance CC′ des centres peut varier entre certaines limites, sans que la régularité de l'engrenage soit altérée. Les rayons CT et C′T des circonférences développées restant les mêmes, ainsi que le rapport des vitesses angulaires, ce qui change avec CC′ c'est la distance

$$TT' = \sqrt{CC'^2 - (CT + C'T')^2}$$

et l'angle TAC dont le sinus est $\frac{CT + C'T'}{CC'}$.

95. Généralités sur les dents des roues d'engrenage : nombre, pas, épaisseur, jeu, saillie, largeur. — Chaque dent d'une roue doit, en général, avoir une forme symétrique par rapport au rayon qui passe au milieu de sa base, afin que chacune des deux roues engrenées puisse mener l'autre de la même manière, quel que soit le sens de sa rotation.

Quels que soient les profils adoptés, les dents qui arment une roue d'engrenage, comme celles que nous étudions ici, doivent évidemment être toutes égales (de même forme), puisque ces dents doivent tour à tour exercer la même fonction.

Par la même raison, toutes les dents d'une même roue doivent être également espacées entre elles. On appelle *pas* la longueur obtenue en divisant la circonférence primitive par le nombre des dents. Il est clair que le pas doit être le même pour deux roues qui engrènent ensemble. Les nombres de dents de ces roues sont donc entre eux dans le rapport direct des rayons de leurs cercles primitifs, et dans le rapport inverse de leurs vitesses angulaires. Si ces deux nombres entiers N et N' sont premiers entre eux, chaque dent d'une roue touche successivement toutes les dents de l'autre roue, et deux mêmes dents ne se retrouvent en contact qu'après que la roue de N dents a fait N' révolutions. Si N est un multiple de N', chaque dent de la grande roue se retrouve, à chacune de ses révolutions, en contact avec la même dent de la petite.

La partie du pas d'un engrenage occupée par la dent se nomme l'*épaisseur* ou le *plein* de la dent ; le reste s'appelle le *creux* ou le *vide*. Les dents sont ordinairement d'égale épaisseur sur les deux roues, si elles sont de la même matière, métal ou bois ; plus généralement il convient de régler les épaisseurs de manière que les dents des deux roues soient à peu près également résistantes : ainsi, les dents en bois sont plus épaisses que celles en fonte avec lesquelles elles engrènent. Le creux excède le plein de la dent qui doit y entrer d'environ 1/15. Cette différence, nécessaire pour remédier à l'imperfection de l'exécution des roues, s'appelle *jeu*.

La *saillie* des dents en dehors des cercles primitifs se détermine par la condition que, pendant le roulement fictif de ces deux cercles, il y ait toujours contact au moins d'une paire de dents, sans quoi il y aurait des chocs et des inégalités dans le mouvement des deux roues. Cette condition est d'autant plus facile à remplir que le nombre des dents est plus grand ; et elle exige, comme on va le voir, qu'il ne soit pas trop petit.

La théorie du frottement dans les engrenages montrera plus tard de quelle importance il est, sous ce rapport, de multiplier

les dents. Elle enseignera que, lorsque le contact de deux dents a lieu jusqu'à une distance notable de la ligne des centres, il vaut mieux que ce soit au delà qu'en avant de cette ligne.

Afin de conserver aux dents une solidité suffisante, malgré leur petite épaisseur, on leur donne parallèlement à l'axe de rotation une assez grande dimension qu'on appelle *largeur de la denture*, et qui est de quatre à cinq fois l'épaisseur.

96. **Détails spéciaux sur les engrenages épicycloïdaux.**— Les engrenages dont le profil se compose d'un flanc droit intérieur au cercle primitif et d'un arc d'épicycloïde extérieure, donnent lieu à deux cas distincts, selon que les dents de la plus petite des deux roues sont ou ne sont pas assez nombreuses pour que le contact puisse commencer à la distance d'un pas en avant de la ligne des centres et finir à la même distance au delà de cette même ligne. Dans le cas de l'affirmative, on borne, comme nous allons l'expliquer, la saillie des dents de manière à restreindre le contact dans ces limites, entre lesquelles il y a toujours deux paires de dents en contact, ou, comme on dit, *en prise*.

Premier cas. — La figure 48 présente un exemple de ce premier cas. A est le point de contact des circonférences primitives $A_0A_1AA_2A_3\ldots$, $A'_1AA'_2A'_3\ldots$ dont les centres non figurés sont désignés par C et C', et dont les rayons sont dans le rapport de 1 à 2. Le nombre de dents de la petite roue est de 15. Voici le détail des constructions très-simples à faire pour tracer les profils complets des dents des deux roues.

1° Diviser les deux circonférences primitives en autant de parties égales qu'il doit y avoir de dents, A étant un des points de division. On a les points A_0, A_1, A_2, $A_3\ldots$ sur la petite circonférence, les points A'_1, A'_2, $A'_3\ldots$ sur l'autre. Chacune des parties des circonférences ainsi divisées est égale au pas, que nous désignerons par p.

2° Mener les rayons CA_1, CA_2, $C'A'_1$, $C'A'_2$, et les cordes

AA_0, AA_2, AA'_0, AA'_2, ce qui détermine les points d'intersection T_1, T_2, T'_1, T'_2.

3° Tracer les deux arcs de cercles T_1BT_2, $T'_1ET'_2$ autour du centre C, et les deux arcs $T'_1B'T'_2$, $T_1E'T_2$ autour de C'.

4° Tracer l'arc d'épicycloïde AE et son égal A_1T_1' qui touche en T'_1 le rayon A'_1C'. Ces épicycloïdes ont pour cercle générateur (93) celui qui a pour diamètre le rayon du cercle primitif C'A et qui roule sur l'autre cercle primitif CA. Tracer de même l'arc d'épicycloïde AE' et son égal A'_2T_2 qui touche en T_2 le rayon CA_2 : le cercle générateur a pour diamètre le rayon AC et roule sur le cercle C'A.

5° Faire l'arc Aa égal à l'épaisseur des dents de la roue C. Dans la figure les dents sont d'égale épaisseur sur les deux roues, et cette épaisseur est de 15/31 du pas. Porter cette même épaisseur en A_1a_1, Aa' et $A'_2a'_2$.

6° Les points a, a_1, a' et a'_2 étant ainsi obtenus, tracer les épicyloïdes ae et a_1e_1 symétriques de AE et $A_1T'_1$, et les épicycloïdes $a'_2e'_2$ et a'e' symétriques de A'_2T_2 et AE'.

Les arcs précédemment tracés (3°) déterminent les *troncatures* Ee, T'_1e_1, E'e', $T_2e'_2$, qui limitent les saillies des dents, les points T_1, b_1, B, b, T_2, où commencent les flancs rectilignes des dents de la roue C, et les points analogues T'_1, b'_1, B', b'_2, T'_2, des dents de la roue C'. Dans la situation indiquée par la figure, il y a contact de trois paires de dents, en T'_1, en A et en T_2. Mais cet état est instantané, et immédiatement après il n'y a plus que deux paires de dents en contact.

7° Les flancs se prolongent vers l'intérieur des roues, soit simplement en ligne droite jusqu'à la jante dans laquelle les dents sont encastrées, soit partie en ligne droite et partie en courbe de raccordement lorsque les dents en métal font corps avec la jante. Dans l'une et l'autre disposition l'espace entre les dents d'une roue doit être suffisant pour y laisser passer, sans contact, les parties saillantes des dents de l'autre roue.

Deuxième cas. — La figure 49 est un exemple du second cas.

Les diamètres primitifs étant encore dans le rapport de 1 à 2, la petite roue n'a que 10 dents. Les constructions qui viennent d'être expliquées s'exécutent encore ici, sauf les modifications suivantes : les arcs de cercles passant par T_1 et T_2, et par T'_1 et T'_2, (3° ci-dessus) sont inutiles, et les troncatures Ee et E_1e_1 sont plus rapprochées du centre C que le point T'_2, parce que les épicycloïdes AE et ae, faces d'une même dent, étant suffisamment prolongées, ne se rencontrent plus en dehors de la circonférence CT'_1; de même les troncatures des dents de la grande roue sont plus rapprochées du centre C' que le point T_1.

Amplitude de prise. — Il est intéressant d'étudier, dans le second cas, à quelle distance de la ligne des centres le contact des deux dents commence, et à quelle autre distance de cette ligne le contact des deux mêmes dents finit. Supposons que la grande roue mène la petite. La dent E'AB', qui actuellement pousse de gauche à droite celle qu'elle touche en A, a commencé à la toucher lorsque le point qui est maintenant en E de la petite roue était en ε sur la circonférence $A\varepsilon T'_1$ dont le diamètre est le rayon C'A du grand cercle primitif. A cet instant le flanc actuellement en AB' était en $\varepsilon\alpha'$; ainsi, le point de la dent B'AE' qui est maintenant en A était en α', et par conséquent le point de la dent BAE, qui est aussi actuellement en A, était en α, obtenu en faisant $A\alpha = A\alpha'$. La même dent B'AE cessera de pousser celle qu'elle touche, lorsque E' sera en ε_1 sur la circonférence dont AC est un diamètre, et par conséquent le point actuellement en A de la dent BAE sera en α_1, tandis que le point A de la dent D'AB' sera en α'_1 obtenu en faisant $A\alpha'_1 = A\alpha_1$.

Concluons que, pendant que deux mêmes dents continuent de se toucher, un point pris sur l'une ou l'autre des deux circonférences primitives parcourt un arc égal à $\alpha\alpha_1$ ou $\alpha'\alpha'_1$. Cet arc est ce que j'appellerai, pour abréger, l'*amplitude de la prise des deux roues*. En exécutant à grande échelle la figure 49, on

trouvera que, pour le cas qu'elle représente, le rapport de l'amplitude de prise au pas est à peu près 1,70. Plus l'amplitude de prise approche d'être double du pas, plus l'engrenage est près de satisfaire à la condition qu'il y ait toujours deux paires de dents en contact.

L'examen de la figure 49 suffit pour partager la durée du parcours d'un pas dans les deux roues, en deux périodes, l'une pendant laquelle deux paires de dents sont en prise, l'autre pendant laquelle le contact n'a lieu que pour une paire. La première période commence à l'instant où le profil curviligne d'une dent de la petite roue arrive, avant la ligne des centres, en $\alpha\varepsilon$, et est poussé au point ε par la dent qui lui correspond dans la grande roue. A ce même instant, il y a contact au delà de la ligne des centres entre deux dents qui sont en avance d'un pas sur les deux dont nous venons de parler et ont les origines de leurs profils curvilignes en γ et γ', à une distance, au delà de A, égale à $a_1\alpha$ et à $a'_1\alpha'$. Cette période de deux contacts finit quand les deux profils dont nous venons de parler arrivent en α_1 et en α'_1; par conséquent, pendant toute sa durée, un point de la petite circonférence primitive a parcouru l'arc

$$\gamma\alpha_1 = AA_1 - A\gamma - \alpha_1 A_1,$$

quantité qu'on peut exprimer en fonction de l'amplitude de prise $\alpha\alpha_1$ et du pas AA_1, car on a

$$A\gamma = a_1\alpha = 2AA_1 - \alpha\alpha_1 - \alpha_1 A_1,$$

d'où, en substituant cette expression dans celle de $\gamma\alpha_1$,

$$\gamma\alpha_1 = \alpha\alpha_1 - AA_1.$$

Dans le cas particulier de roues de 10 et de 20 dents, nous venons de dire que $\alpha\alpha_1$ est égal à 1,70 AA_1. On a donc alors

$$\gamma\alpha_1 = 0{,}70\ AA_1,$$

c'est-à-dire que l'arc parcouru pendant la période où deux paires de dents sont en prise est les 0,70 d'un pas, et par conséquent, comme on le vérifierait directement, la seconde période, où le contact n'existe qu'en une seule paire de dents, ne dure que pendant le parcours de 0,30 d'un pas. Ajoutons, que si l'on porte de A en δ et en δ' deux arcs égaux à $\alpha_1 A_1$, on a en $\delta\gamma$ et en $\delta'\gamma'$ les arcs que parcourent sur les circonférences primitives les profils des dents en contact dans la seconde période. Ainsi, pendant ce parcours, les roues ne se touchent qu'en une paire de dents, mais le contact a lieu plus près de la ligne des centres.

Quelques professeurs, notamment Savary dans ses leçons à l'Ecole polytechnique, et à son exemple Leroi, ont émis l'opinion qu'on devrait éviter de faire toucher les dents des engrenages avant leur passage à la ligne des centres. Mais les motifs allégués supposent dans l'exécution ou dans l'état d'entretien de ces dents des imperfections grossières; aussi, la pratique des constructeurs ne tient-elle point compte de cette prohibition. Nous avons dit (93) que, lorsque le contact de deux dents a lieu à une distance notable de la ligne des centres, et surtout avant leur arrivée à cette ligne, le frottement devient plus nuisible que lorsque cette distance est faible. C'est dans la Mécanique appliquée, chapitre du frottement, que doivent se trouver les développements nécessaires pour éclaircir cette question. Nous nous bornons à dire ici qu'en général il est bon de multiplier assez les dents pour que la plus grande distance du contact à la ligne des centres ne soit qu'une petite fraction du rayon, et dans ce cas l'expérience prouve que, pour obvier à l'imperfection inévitable de l'exécution des dents et à leur déformation par l'usure, il est utile qu'il y ait constamment deux paires de dents en prise, une après et l'autre avant la ligne des centres. C'est ce qui se trouve réalisé dans le cas de la figure 48 où l'une des roues a 15 dents et l'autre 30. Si la plus grande des deux roues avait plus de 30 dents, à plus forte raison suffirait-il

que l'autre en eût 15 pour que l'amplitude de la prise fût de deux pas. Si les deux roues étaient égales, il faudrait qu'elles eussent chacune au moins 17 dents pour satisfaire à cette condition, dont on peut d'ailleurs s'écarter un peu sans inconvénient notable.

Il est même certains cas où des motifs tels que la nécessité de réduire l'espace occupé par un engrenage, portent à diminuer autant que possible le nombre des dents, sans s'inquiéter beaucoup de l'économie de la force employée à le mouvoir. Dans cette hypothèse, la condition qui subsiste est qu'il y ait toujours une paire de dents en contact pendant que les vitesses angulaires des deux roues restent dans un rapport constant. Il faut donc et il suffit alors que l'amplitude de la prise soit un peu supérieure au pas. Or, un essai graphique facile à vérifier constate que, sous cette condition, quand la plus grande des deux roues a au moins 12 dents, l'autre peut à la rigueur n'en avoir que 4; et que quand la première a moins de 12 dents, il est nécessaire et rigoureusement suffisant que l'autre en ait au moins 5. Mais il est à remarquer que de pareils engrenages sont beaucoup plus sujets que les autres à se déformer par l'usure, parce que la vitesse de glissement des dents devient considérable à l'instant où l'une des dents touche l'autre vers son extrémité (91), ce qui fait qu'après un certain temps de service les pointes des dents s'effilent, tandis que leurs flancs se creusent dans leur partie la plus rapprochée du centre, et le mouvement des deux roues perd la propriété du rapport constant de leurs vitesses angulaires. Sans doute le même genre d'usure a lieu dans les engrenages dont les dents sont assez nombreuses pour que l'amplitude de prise soit de deux pas; mais cette usure est beaucoup moindre, parce que, à l'instant où une paire de dents est en contact à une distance de la ligne des centres qui rend leur glissement considérable, à ce même instant une autre paire de dents est en contact près de la ligne des centres sans glissement sensible et par conséquent aussi

sans usure notable. Cette circonstance impose évidemment une limite à l'usure des pointes.

97. Détails spéciaux sur les engrenages à développantes de cercles. — Les deux cas mentionnés à l'article précédent sont encore ici à distinguer.

PREMIER CAS. — La figure 50 donne un exemple du premier cas. La plus petite roue a 20 dents, l'autre 28. C et C′ sont leurs centres, et A le point de contact des circonférences primitives. Voici le détail des constructions à faire pour tracer les profils complets des deux roues.

1° Diviser les deux circonférences primitives en autant de parties égales qu'il doit y avoir de dents, A étant un des points de division. On a les points A_0, A_1, A_2, A_3... sur la petite circonférence CA ; les points A'_0, A'_1, A'_2, A'_3 sur la circonférence C′A.

2° Mener les cordes A_0A et AA_3 sous-tendant deux pas de la petite roue. Prolonger ces cordes en N et N′ sur la grande circonférence, en s'assurant que les arcs satisfont à la condition $AN = AN' = AA_0 \cdot \frac{R'}{R}$. La droite $N'A_3$ est le lieu des contacts des dents, dans l'hypothèse que la grande roue mène la petite de gauche à droite.

3° Tracer autour des centres C et C′ les deux circonférences tangentes en T_1, T, T'_1, T′, aux droites A_0N, A_3N'. C'est sur elles que se trouvent les naissances des profils de contact des dents.

4° Mener la circonférence $C'T_1$ passant par T et déterminant les troncatures des dents de la roue C′. Mener les rayons A'_1C' et A'_2C' rencontrant les cordes AN′ et AN en K_1 et K. Décrire la circonférence CK_1 passant par K et déterminant les troncatures des dents de la roue C.

5° Construire les courbes BAE, $B_1A_1E_1$, $B_2A_2E_2$, qui, passant par les points A, A_1, A_2, sont des développantes du cercle

CT (*), et tournent leur convexité en sens contraire du mouvement, la roue C étant supposée menée.

6° Porter de A et de A_1 dans le sens du mouvement les épaisseurs Aa et A_1a_1 égales à 15/31 du pas.

7° Construire les développantes bae, $b_1a_1e_1$, symétriques de BAE, $B_1A_1E_1$.

8° Faire pour la roue C' les opérations analogues à celles qui viennent d'être indiquées (5°, 6°, 7°), ce qui donne les courbes B'AE', $B'_1A'_1E'_1$, $B'_2A'_2E'_2$ et leurs symétriques b'a'e', $b'_2a'_2e'_2$.

9° Prolonger les courbes vers l'intérieur et les raccorder de manière à ménager entre deux dents d'une roue l'espace nécessaire pour laisser passer sans contact les parties saillantes des dents de l'autre roue.

Remarque. — Un examen attentif de la figure fera reconnaître que l'amplitude de la prise des deux roues y excède quelque peu deux pas.

DEUXIÈME CAS.— La figure 51 est un exemple du second cas, dans l'hypothèse où la petite roue n'a que 10 dents, l'autre en ayant 20. C et C' sont leurs centres, CA et C'A leurs rayons primitifs, AA_1 et AA'_1 des arcs égaux au pas. Les constructions propres à obtenir les profils diffèrent en quelques détails de ce qu'elles sont dans le premier cas.

La première chose à faire est de déterminer la droite AT lieu

(*) Un cercle CT étant donné, pour construire sa développante passant pour un point donné A sur la tangente AT, on prend une ouverture de compas qui ne soit pas plus grande que 1/6 du rayon ; on la porte à partir de A vers T d'abord sur la tangente, puis à la suite on porte une dernière ouverture de compas aboutissant sur la circonférence ; ensuite on revient en sens contraire sur la circonférence par le même nombre d'ouvertures jusqu'en B qui est l'origine de la développante. Après quoi on trace autant de tangentes qu'on veut avoir de points de la courbe, et on répète l'opération précédente en sens inverse. Ce procédé est fondé sur ce qu'une corde qui n'excède pas 1/6 du rayon n'est inférieure à l'arc qu'elle sous-tend que de 5 à 6 dix-millièmes.

géométrique des contacts, dont l'angle CAT avec la ligne des centres doit différer aussi peu qu'il est possible d'un angle droit. Or, vu le petit nombre de dents de la roue C et l'impossibilité d'une amplitude de prise de deux pas, il ne convient plus que, comme dans le premier cas, la droite AT prolongée en P sous-tende un arc de cette même étendue de deux pas. M étant le milieu de l'arc AMP, R le rayon AC de la petite roue, et n le nombre de dents qu'elle doit avoir, on obtient une grandeur suffisante de l'arc AM en posant

$$\frac{AM}{2\pi R} = 0{,}03 + \frac{0{,}48}{4 + n}.$$

Cette formule empirique, déduite d'essais graphiques qu'il serait superflu de détailler ici, est applicable aux diverses valeurs qu'on peut donner à n, depuis 5 jusqu'à 20. Dans ce dernier cas AM devient 0,05 de la circonférence, c'est-à-dire égal au pas, ce qui doit être, parce que la roue C se trouve alors dans le premier cas.

Le rayon CM et sa parallèle C'T' déterminent sur la droite PA prolongée les points T et T' et par suite les circonférences dont les rayons sont CT et C'T'. On construit alors les développantes BAE et B'AE'; puis il faut choisir les épaisseurs qu'il convient de donner aux dents. On pourrait, comme nous l'avons fait dans les exemples précédents, prendre les arcs Aa et Aa', sur les circonférences primitives, égaux entre eux et à 15/31 du pas. Mais il paraît préférable de rendre égales entre elles les bases des dents, Bb et B'b', prises sur les circonférences CT et C'T', où sont les naissances des développantes. Cela est très-facile : soit $Aa = x$, $Aa' = x'$, et le pas $AA_1 = p$. On a, en désignant par F et F' les intersections de la droite CC' et des circonférences CT, C'T',

$$x + x' = \frac{30}{31} p,$$

$$Bb = 2BF + x\frac{TC}{AC}, \quad \text{et} \quad B'b' = 2B'F' + x'\frac{T'C}{AC'},$$

d'où, à cause de

$$Bb = B'b' \quad \text{et} \quad \frac{TC}{AC} = \frac{T'C'}{AC'},$$

on conclut

$$x - x' = 2\,(B'F' - BF)\,\frac{AC'}{TC},$$

et par suite

$$x = \frac{15}{31}\,p + (B'F' - BF)\,\frac{AC}{TC},$$

et

$$x' = \frac{15}{31}\,p - (B'F' - BF)\,\frac{AC}{TC}.$$

Ayant ainsi obtenu les points **a** et **a'**, on construit les développantes **be** et **b'e'** symétriques de **BE** et **B'E'**. Les deux courbes **B'E'** et **b'e'** ne devraient être prolongées à la rigueur que jusqu'à la rencontre de la circonférence ayant **C'I** pour rayon, laquelle fournirait l'arc de troncature **B'e'**, parce que le contact des deux profils **BE** et **B'E'** doit théoriquement cesser quand le point **E'** arrive en **T**, dernier point du lieu des contacts; cependant, comme la droite **AT** se confond sensiblement avec la circonférence qui la touche, dans une étendue appréciable, sur laquelle se meut l'origine **B** de la développante **BE**, on peut, pour augmenter l'amplitude de prise, et sans inconvénient, placer la troncature un peu plus loin du centre **C**, comme on le voit dans la figure, au delà de **E'e'**. Les deux courbes **BE** et **be** pourraient, au point de vue géométrique, être prolongées jusqu'à leur inter-

section; mais il paraît préférable en pratique d'en retrancher une partie par une troncature figurée en Ee.

Amplitude de la prise des deux roues. — Le mouvement des roues en A étant supposé de gauche à droite, la dent de la grande roue, qui touche et pousse actuellement la petite en A, a commencé à toucher quand le point E de la petite roue était en ε sur la droite TT'; et alors le point du profil BAE qui est actuellement en A était en α obtenu en menant EC et εC, et en faisant $\mu\alpha = mA$. La même dent de la grande roue cessera régulièrement de presser la petite lorsque le point actuellement en E' se trouvera en T; et alors le point actuellement en A du profil BAE sera en α_1 obtenu en faisant $T\varphi = BF$ et menant la droite $C\varphi\alpha_1$. L'amplitude de prise est donc l'arc $\alpha\alpha_1$, et pour le cas de la figure on trouve que le rapport de $\alpha\alpha_1$ au pas est 1,41. On en conclurait, par un examen analogue à celui qui a été expliqué (96) pour les engrenages épicycloïdaux, que l'arc parcouru pendant la période où deux paires de dents sont en prise est les 0,41 d'un pas, et que la période où le contact n'existe qu'en une seule paire dure pendant le parcours des 0,59 d'un pas, mais que ce simple contact a lieu plus près de la ligne des centres.

DES ENGRENAGES INTÉRIEURS.

98. Profils à flancs droits des engrenages intérieurs. — Le centre d'un des cercles primitifs peut être dans l'intérieur de l'autre (85). La jante de la grande roue est alors extérieure à son cercle primitif. Sous le point de vue purement géométrique, toute la théorie précédente s'étend à ce genre d'engrenage; mais son application matérielle souffre des exceptions comme on va le voir.

L'engrenage à flancs droits sur la grande roue est impossible, c'est-à-dire qu'il est pratiquement inconciliable avec la continuelle égalité de vitesse des deux circonférences primitives.

Deux cas sont à considérer, suivant que le diamètre de la petite roue est plus petit ou plus grand que le rayon de la grande. Nous ne traiterons en détail que le premier cas.

Soient C et C′ (fig. 82) les centres des deux cercles primitifs AA_0A_1, $A'A_0A'_1$ qui se touchent en A_0. Le rayon $C'A_0$ est plus petit que $\frac{1}{2}CA_0$. Le flanc droit ABC, supposé appartenir à la grande roue, serait décrit par le point B du cercle auxiliaire BA_0B_1, dont le diamètre est la moitié du grand diamètre primitif et dont le centre est actuellement au milieu O du rayon CA_0, ce cercle générateur roulant dans l'intérieur du cercle primitif AA_0A_1. La courbe correspondante A′B′ devant former le profil de la dent de la petite roue, serait l'épicycloïde décrite extérieurement au cercle primitif de celle-ci, par le même point B du même cercle générateur roulant sans glisser sur la circonférence $A'A_0A'_1$. Cela étant, et les deux profils AB et A′B′ se trouvant à gauche de la ligne des centres, supposons que les deux roues tournent autour de leurs centres respectifs, à droite, dans le sens des flèches, la grande roue menant la petite. Point de difficulté jusqu'à l'instant où les deux surfaces en contact seront arrivées à se toucher en A_0, sur la ligne des centres. Mais au delà l'égale vitesse des deux circonférences primitives ne peut plus subsister : si le flanc de la grande roue est supposé transporté en A_1B_1, position symétrique de AB relativement à la ligne des centres $CC'A_0$, de sorte que A_0A_1 est égal à A_0A, on reconnaît, en construisant le profil $A'_1B'_1$, nouvelle position de A′B′, que ce profil courbe *coupe* le profil rectiligne A_1B_1; que par conséquent les positions qu'ils devraient prendre simultanément sont inconciliables; et l'on voit aisément que cette intersection résulte de ce que la droite A_1C est tangente en B_1 à la seconde branche d'épicycloïde ponctuée dans la figure et symétrique de la branche $A'_1B'_1$ relativement à la droite $C'A'_1$, en même temps qu'elle est symétrique de A′B′ relativement à $C'A_0$.

L'impossibilité pratique de l'engrenage à flancs droits sur la

grande roue se reconnaîtrait d'une manière analogue pour le second cas ci-dessus indiqué.

Au contraire, *l'engrenage à flancs droits sur la roue intérieure est possible*, au moins lorsque le diamètre de cette petite roue n'excède pas le rayon de la grande. Le flanc rectiligne A'B' (fig. 53) est décrit par le point B de la circonférence dont le centre est actuellement en O et dont le diamètre est égal au petit rayon $C'A_0$. Le profil AB appartenant à la grande roue est décrit par le même point B du même cercle générateur roulant dans la grande circonférence primitive. Si les roues tournent dans le sens des flèches, le flanc de la petite roue mène la courbe AB de la grande *avant et jusqu'à la ligne des centres*. Au delà, le flanc rectiligne $A'_1B'_1$ reste en arrière de la courbe A_1B_1 pendant que les circonférences primitives conservent l'égalité de leurs vitesses.

99. Profil saillant épicycloïdal sur la roue intérieure. — Ce profil tel que $A'_1E'_1$ (qui se trouve reproduit en A'E') et le profil A_1E_1 qui lui correspond sur la grande roue (et qui est reproduit en AE) sont décrits par le point E_1 d'un cercle auxiliaire extérieur qui touche actuellement en A_0 les cercles primitifs sur lesquels il roule. Le rayon de ce cercle générateur peut être pris arbitrairement, et la figure montre que, si les roues tournent dans le sens des flèches, la courbe A'B' de la petite mène la grande au delà seulement de la ligne des centres. On remarque ici que le profil AE de la grande roue est concave, mais d'un rayon de courbure toujours plus grand que celui du profil de la petite roue, l'un et l'autre de ces rayons de courbure étant pris au point de contact commun.

100. Profils mixtes sur les deux roues. — En donnant à chaque dent un profil mixte, comme l'indique la figure, on fait que le contact des deux roues commence avant la ligne des centres et finit au delà. Si les roues tournent dans le sens des

flèches, la petite roue mène la grande : le flanc A′B′ pousse la courbe AB jusqu'à la ligne des centres, après quoi la courbe A′E′ convexe pousse la courbe concave AE.

101. Profils en développantes de cercles de deux roues, dont l'une est intérieure. — La solution expliquée au numéro 94 s'applique d'une manière analogue au cas de l'engrenage intérieur. C et C′ (fig. 54) sont les centres des cercles primitifs qui se touchent en A_0. La normale commune aux dents en contact étant $TT'A_0$, on trace les circonférences dont les rayons sont les perpendiculaires CT et C′T′, et les profils des dents sont les développantes de ces circonférences. Les surfaces des dents de la grande roue sont concaves; mais on rend cette concavité peu sensible en multipliant suffisamment les dents. Dans la pratique l'angle de la normale TA_0 avec la ligne des centres ne doit pas différer beaucoup d'un angle droit (cet angle est très-exagéré dans la figure, afin de rendre plus sensible la distinction des deux profils). Le contact des dents commence et finit à une petite distance, avant et après la ligne des centres.

ENGRENAGES ÉCHELONNÉS ET ENGRENAGES HÉLIÇOÏDAUX.

102. Engrenages en rangs échelonnés de Hooke. — La considération du glissement des engrenages ordinaires, lequel (91) est à chaque instant proportionnel à la distance n comprise entre le point de contact actuel des dents et le point commun aux deux cercles primitifs sur la ligne des centres, montre l'utilité de multiplier, autant qu'il est possible, le nombre des dents des deux roues, et par conséquent de diminuer leur pas. Or le moyen de faire cette multiplication sans diminuer l'épaisseur des dents, c'est d'en établir plusieurs rangs sur chacune des jantes. Par exemple, trois rangs de dents également échelonnées, comme l'indique la figure 55, réduisent au tiers le pas effectif. Supposé que les deux roues dont cette figure représente des segments tournent, autour de leurs axes O et O′, dans le

sens indiqué par les flèches, la dent A va d'abord pousser la dent A′, après quoi la dent B du second rang poussera la dent B′; puis succédera le contact des dents C et C′ du troisième rang, ensuite A_1 atteindra A'_1, puis succéderont les contacts de B_1 et B'_1, de C et C'_1, de A_2 et A'_2, et ainsi de suite, absolument comme si les dents, trois fois plus minces, étaient situées sur un même rang, suivant l'usage ordinaire. On se fait une idée exacte de cette disposition en imaginant que deux roues ordinaires, dont les dents se projetteraient en A, A_1, A_2,... pour l'une, et en A′, A'_1, A'_2,... pour l'autre, aient été divisées par des plans perpendiculaires aux axes en trois plateaux égaux; qu'ainsi les dents primitives aient été divisées en dents partielles trois fois moins larges, restées adhérentes à la portion de jante qui leur appartient; qu'alors, les plateaux qui portent les dents C, C_1,... et C′, C'_1,... étant maintenus fixes, on ait fait tourner d'un tiers de pas les deux plateaux voisins, qui portent les dents B, B_1,... et B′, B'_1,..., chacun dans le sens du mouvement que doit avoir la roue à laquelle il appartient, c'est-à-dire que dans le cas de la figure le plateau des dents B, B_1,... aurait tourné d'un tiers de pas à droite, et celui des dents B′, B'_1,... d'un tiers de pas à gauche; que de même on ait fait tourner le plateau des dents A, A_1,... et celui des dents A′, A'_1,... de manière qu'ils soient d'un tiers de pas en avance sur les deux plateaux des dents B, B_1,... B′, B'_1,...; qu'enfin les six plateaux, ainsi disposés en gradins de sens inverses, aient été calés, fixés sur leurs deux arbres respectifs.

Non-seulement la multiplication des dents permet, en diminuant leur saillie, de réduire leur glissement, mais cette diminution de saillie faisant décroître les chances de rupture des dents, compense au moins en partie l'affaiblissement qui résulte de la diminution de largeur parallèlement aux axes de rotation. Nous n'insistons pas sur ce sujet, parce que les considérations d'après lesquelles les dimensions des dents sont calculées eu égard aux efforts qu'elles doivent subir, appartiennent à la

partie de la mécanique qui traite de la *résistance des matériaux*.

103. Engrenage héliçoïdal, sans glissement, de Hooke et de White. — Puisque, à mesure que le nombre des rangs échelonnés augmente, le glissement diminue, on est naturellement conduit à le faire disparaître complétement, en multipliant les dents à l'infini, c'est-à-dire en disposant les dents en hélice sur la jante. Dans ce cas la surface des dents, au lieu d'être cylindrique, engendrée par la translation du profil parallèlement à l'axe de rotation de la roue, est héliçoïde, pouvant être engendrée par le même profil déplacé par un mouvement composé d'une translation uniforme parallèle à l'axe, et d'une rotation uniforme autour de ce même axe, de manière que tous les points du profil d'une même dent décrivent autour de cet axe des hélices de même pas (*). Les hélices directrices tracées sur les cylindres primitifs des deux roues, hélices sur lesquelles se fait à chaque instant le contact, dans le plan passant par les deux axes de rotation, ont, non le même pas, mais une inclinaison égale sur les génératrices des cylindres ; et cette inclinaison est en sens inverses sur les deux roues. Les profils des dents, qui ont peu de saillie, doivent pour le mieux avoir dans cette petite étendue la figure qui conviendrait à un engrenage ordinaire; mais la condition essentielle est le tracé exact des hélices primitives, sur lesquelles doit, comme nous venons de le dire, avoir lieu le contact. Cette ingénieuse disposition, imaginée par Hooke en 1666, était tombée dans l'oubli, lorsqu'elle a été inventée de nouveau par White, vers 1808. Quelque avantageuse qu'elle soit sous le double rapport de la régularité du mouvement et de l'économie du travail mécanique, elle est

(*) On remarquera que ce qu'on appelle le *pas* d'une hélice, étant la distance entre deux rencontres successives de cette courbe avec une même génératrice du cylindre où elle est tracée, n'a aucun rapport avec ce qu'on désigne sous le même nom de pas (95) dans une roue dentée.

cependant peu employée, probablement à cause de la difficulté de l'exécution, et aussi parce que la pression mutuelle des roues ne se faisant à chaque instant qu'en un point, des ruptures peuvent être à craindre si cette pression était très-grande.

CRÉMAILLÈRE ET ROUE DENTÉE.

104. Engrenage d'une crémaillère et d'une roue. — Cet engrenage, dont la figure 56 donne une idée, établit une liaison entre une translation uniforme et une rotation uniforme autour d'un axe perpendiculaire à la translation. C'est donc le cas particulier des engrenages autour de deux axes parallèles, où l'un des cercles primitifs ayant son rayon infini devient une ligne droite, axe primitif de la crémaillère. La vitesse linéaire de la crémaillère étant v, la vitesse angulaire de la roue w, son rayon primitif r, le nombre de ses dents n, le pas commun à la roue et à la crémaillère p, on a entre ces cinq quantités les deux relations

$$v = wr \quad \text{et} \quad np = 2\pi r;$$

de sorte qu'on peut, par exemple, se donner w, n et r pour en conclure v et p, ou bien se donner w, n et v pour en conclure r et p.

Les théories précédentes s'appliquent par extension à ce cas particulier.

Celle de l'*engrenage à lanterne* (92) s'applique avec ces seules différences que, si la roue est la lanterne, l'épicycloïde décrite par le centre d'un fuseau relativement à la crémaillère se réduit à une cycloïde, et si c'est la crémaillère qui porte les fuseaux, la courbe décrite par le centre de chacun d'eux relativement à la roue est une développante de cercle.

La théorie de l'*engrenage à flancs normaux* (93) s'applique avec cette modification, que l'épicycloïde adhérente à la petite roue (fig. 57) devient une développante de cercle, tandis que

tuellement, de manière qu'ils roulent sans glisser l'un sur l'autre, lorsque, par l'effet d'un moteur quelconque, ils tournent autour de leurs axes fixes et concourants.

Soient (fig. 59) S le sommet commun, A un point de la génératrice de contact des deux cônes, AO et AO′ les distances de A aux deux axes (ce sont les rayons de deux cercles qui roulent simplement l'un sur l'autre), α, α', β les angles OSA, O′SA, OSO, enfin w et w' les vitesses angulaires des deux cônes.

Connaissant le rapport de ces vitesses et l'angle β des deux axes, on calcule aisément les angles α et α'.

On a

$$OA \cdot w = O'A \cdot w', \quad \text{d'où} \quad w \sin \alpha = w' \sin \alpha';$$

par suite, en remplaçant α' par $\beta - \alpha$,

$$\frac{w}{w'} \sin \alpha = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha,$$

d'où

$$\cot \alpha = \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{w}{w'} + \cos \beta \right).$$

L'un des cônes peut être intérieur à l'autre (fig. 60), et alors les rotations sont de même sens, au lieu que dans le cas précédent elles sont de sens contraires.

L'un des cônes peut être remplacé par un plan (fig. 61) dans lequel doit se trouver le sommet de l'autre.

107. Engrenages coniques. — Deux roues dont les axes concourent (fig. 62) sont armées de dents qui se pressent mutuellement pendant qu'elles tournent, comme si la communication de mouvement avait lieu par deux cônes de friction que l'on considère comme surfaces *primitives* et purement géomé-

triques entraînées dans le mouvement des roues. On voit, par analogie avec ce qui a été dit précédemment, qu'on pourrait prendre arbitrairement la surface liée à l'un des cônes, et en conclure celle qui conviendrait pour l'autre. Les solutions ordinaires terminent les dents par des surfaces coniques ayant pour sommet la rencontre S des deux axes. Dans ce cas, si l'on imagine la sphère dont le centre est S et le rayon SA, et sur laquelle sont par conséquent les circonférences OA, O'A, on voit qu'on peut déterminer sur cette sphère les profils des dents coniques par des considérations et des constructions analogues à celles qui ont été employées pour les engrenages cylindriques. Les droites sont remplacées par des arcs de grands cercles, les épicycloïdes planes par des épicycloïdes sphériques. On est ainsi conduit à distinguer trois systèmes analogues à ceux qui sont usités pour les engrenages à axes parallèles. On peut exécuter rigoureusement les constructions par les méthodes de la géométrie descriptive ; mais dans la pratique on se contente d'une approximation qui suffit. Par le point A de la génératrice de contact des cônes primitifs, on mène perpendiculairement à cette génératrice la droite CC' rencontrant les axes en C et C'. Puis on considère ces points C et C' comme les sommets de cônes droits, ayant pour bases les cercles primitifs dont les rayons sont OA, O'A, et c'est sur les surfaces développées de ces cônes que l'on trace les directrices ou profils des surfaces coniques des dents. A cet effet on remarque que, pendant la rotation des deux roues, ces directrices doivent se toucher, et que dans le voisinage de A elles s'écartent très-peu du plan tangent projeté en CC' et commun aux deux cônes CAO, C'AO'. De plus les divers points de ces profils se déplacent en restant respectivement à des distances constantes des centres C, C'. En conséquence on développe les deux surfaces coniques COA, C'AO' en deux secteurs ayant, pour distance des centres, la longueur CC'; pour rayons, les distances CA, C'A; pour bases, des arcs de mêmes longueurs que

les circonférences primitives dont les rayons sont OA, O'A; et l'on prend ces arcs comme *cercles primitifs* d'engrenages dont on fait le tracé d'après le système à fuseaux, à épicycloïdes ou à développantes qu'on a adopté. Ce tracé fournit les panneaux qui servent à transporter sur les surfaces coniques CA, C'A les profils des dents.

§ 3.

LIAISON DE DEUX CORPS SOLIDES EN CONTACT ET ASSUJETTIS A TOURNER AUTOUR DE DEUX AXES NON CONCOURANTS.

108. Liaison d'une rotation et d'une translation. — Vis et écrou. — Considérons d'abord le cas particulier où l'une des rotations est remplacée par une translation parallèle à l'axe de la rotation subsistante. Ce cas est celui dont une vis et son écrou offrent un exemple vulgaire, soit que l'écrou tourne simplement, tandis que la vis se meut parallèlement à son axe sans tourner, soit que la vis tourne simplement autour de son axe, tandis que l'écrou ne pouvant tourner, se transporte parallèlement à l'axe.

Nous rappelons ici que l'on distingue dans une vis : 1° le *noyau*, cylindre sur lequel le *filet* est en saillie ; 2° le *profil* ordinairement carré ou triangulaire qui, situé dans un plan passant par l'axe du cylindre, engendre le filet en tournant et glissant de manière que chacun de ses points décrive une hélice ; 3° le *pas*, quantité dont un point mobile sur le filet s'avance parallèlement à l'axe, après un tour entier, en restant sur une même hélice et par conséquent à une distance constante de cet axe (une partie de filet correspondante à un tour entier s'appelle une *spire*); 4° le *nombre* de filets distincts (le pas divisé par ce nombre, s'il est plus grand que 1, donne l'espace de milieu en milieu de deux filets voisins parallèlement à l'axe de la vis, et deux plans

perpendiculaires à l'axe et dont la distance est égale au pas, comprennent entre eux autant de spires qu'il y a de filets distincts dans la vis); 5° enfin le *sens à droite ou à gauche* de la vis, suivant que la rotation autour de l'axe fixe, d'un point mobile qui suit le filet en avançant dans le sens pris pour positif de l'axe, est directe ou rétrogade, positive ou négative (61). Les vis dites *vis à bois*, si fréquemment employées, ont leur profil triangulaire, un filet unique et le sens à droite.

En général, supposons qu'un point du corps en translation soit assujetti à se mouvoir parallèlement à l'axe du corps tournant, en glissant sur ce corps. Le point glissant décrit donc sur ce corps une courbe située sur une surface cylindrique de révolution autour de l'axe de rotation ; et de la figure de cette courbe dépend la relation entre la vitesse de translation du premier corps et la vitesse angulaire du second. Pour que ces deux vitesses soient uniformes, la courbe doit être une hélice dont le pas est égal à l'espace que parcourt le premier corps pendant que le second fait un tour. C'est ce qui arrive pour la vis.

Une vis dont le noyau n'a qu'un mouvement de rotation sans translation, comme dans l'exemple indiqué par la figure 63, imprime à l'écrou, que ses guides empêchent de tourner, un mouvement en vertu duquel il se transporte d'une longueur égale au pas de la vis, pendant que celle-ci fait un tour. r étant la distance d'un point quelconque de la vis à son axe, un tour fait parcourir à ce point la circonférence $2\pi r$, tandis que l'écrou s'avance d'un pas p. Le même rapport subsistant pour une fraction quelconque de révolution, si l'on appelle w la vitesse angulaire de la vis et v la vitesse de l'écrou, on a, quel que soit r,

$$\frac{wr}{v} = \frac{2\pi r}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{w}{v} = \frac{2\pi}{p}.$$

Si c'est l'écrou qui tourne simplement, et que la vis ne puisse avoir qu'un mouvement de translation, la même relation existe,

comme on le voit aisément, entre la vitesse angulaire w de l'écrou, la vitesse linéaire v de la vis, et leur pas commun p.

Une vis est ordinairement plus longue que l'écrou ; mais l'inverse peut avoir lieu, sans que rien soit changé à la relation de leurs mouvements. Quand c'est la vis qui tourne sans translation, on substitue quelquefois à l'écrou une sorte de crémaillère dite *peigne*, qui n'en est qu'un segment compris entre deux plans parallèles à l'axe de la vis ; le peigne guidé de manière à ne se mouvoir que parallèlement à ce même axe, peut parcourir une étendue égale à celle qu'occupent les dents dont il est armé.

Si la courbe située à une distance r de l'axe de rotation est autre qu'une hélice, w étant la vitesse angulaire du corps tournant, à l'instant où un point **M** du corps en translation occupe sur cette courbe la position **A**, i étant l'angle que la tangente en **A** à cette courbe fait avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, on conclut aisément de ces données la vitesse v du corps en translation à l'instant dont il s'agit, et la vitesse de glissement v_r, savoir :

$$v = rw \operatorname{tang} i \quad \text{et} \quad v_r = \frac{v}{\sin i} = \frac{rw}{\cos i}.$$

Cette conception d'un point **M** du corps en translation assujetti à parcourir une courbe tracée sur un cylindre appartenant au corps tournant, se réalise dans la pratique en creusant dans le cylindre une rainure où s'engage et se meut une broche (dite *bouton, goujon*, etc.) fixée en saillie sur le corps en translation. Cette broche est ordinairement cylindrique, et son axe de figure rencontre perpendiculairement l'axe de la rotation. Les faces de la rainure sont déterminées par la condition d'être continuellement tangentes à la broche pendant le mouvement des deux corps : elles sont donc les enveloppes des positions successives que la broche prend relativement au corps tournant.

109. Rotation et translation oscillatoire. — Si la courbe était plane et par conséquent une ellipse, la rotation simple de l'un des corps toujours dans un même sens produirait un mouvement d'oscillation de l'autre corps. Soit i l'angle d plan de la courbe avec un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, que nous supposons vertical pour fixer les idées. A un certain instant, le point glissant sur cette courbe est en A (fig. 64), extrémité de son diamètre horizontal. Au bout d'un certain temps, le cylindre ayant tourné d'un angle α égal à AOA', le second corps se sera élevé d'une hauteur AN égale à A'M ou A'P tang i ou OA sin α tang i; d'où il suit que ce point glissant du corps en translation a la même projection sur une verticale qu'un point m qui se mouvrait sur un cercle vertical dont le rayon oa serait égal à OA tang i, avec la même vitesse que tout point qui sur le corps tournant est situé à cette distance OA tang i de son axe de rotation. Lorsque la rotation est uniforme, le mouvement oscillatoire du corps en translation est celui qui a été indiqué (18), comme exemple de mouvement varié.

VIS SANS FIN.

110. Liaison de deux rotations dont les axes non concourants sont rectangulaires. — L'engrenage connu sous le nom de *vis sans fin* réalise cette liaison dans le cas où les rotations sont en rapport constant.

On se fait une idée juste, quoique incomplète, de ce mécanisme, en imaginant qu'au *peigne* mentionné au numéro 108 soit substituée une roue dentée tournant autour d'un axe fixe, situé à une certaine distance de l'axe également fixe de la vis, et perpendiculaire à sa direction. On reconnaît au premier aperçu que la vis, en tournant sans translation, entraîne la roue au moyen de quelques dents engagées entre ses filets et continuellement remplacées par d'autres, comme la même vis entraînerait un long écrou qui ne pourrait se mouvoir que par trans-

lation parallèle à l'axe de cette même vis. Celle-ci prend dans ce cas le nom de *vis sans fin*, parce qu'elle peut tourner indéfiniment en menant la roue dans le même sens, ce qui n'a pas lieu pour un écrou ou un peigne rectiligne.

Profils des filets de la vis sans fin et forme des dents de la roue. — Une observation que chacun a pu faire, c'est que, lorsque nous regardons une vis tourner sans translation, si elle est un peu longue et que notre attention ne se porte que vers son milieu, ou mieux encore si ses extrémités sont masquées, il nous est difficile de nous défendre d'une illusion par laquelle la vis nous semble se déplacer par une simple translation; et cette translation est uniforme si la vitesse angulaire de la vis est constante : sa vitesse apparente linéaire est telle, qu'un parcours rectiligne d'un pas semble se faire pendant chaque révolution effective de la vis. L'explication fort simple de ce fait, c'est que la perspective ou la projection, sur un plan fixe, des positions successives de la vis varie de la même manière, soit que la vis tourne, soit qu'elle se meuve sans tourner, et que, pour nous faire admettre ce second cas moins simple, il faudrait que quelques circonstances, comme des taches ou marques quelconques sur la vis nous avertissent de l'existence de la rotation. C'est ainsi qu'une surface de révolution de couleur parfaitement uniforme et tournant autour de son axe de figure nous paraîtrait immobile.

De là il résulte que les dents de la roue doivent, par leur forme, satisfaire aux mêmes conditions que si elle engrenait avec la vis qui, sans tourner, se transporterait en glissant le long de son axe fixe, à raison d'un pas par tour de sa rotation effective.

La vis, dans cette hypothèse, ferait exactement la fonction d'une crémaillère, sauf cette différence, d'avec la crémaillère ordinaire, que le profil de celle-ci, dans des plans quelconques perpendiculaires à l'axe de la roue, est toujours le même, tandis

que les intersections de la vis par ces plans varient avec leur distance à son axe.

Cette remarque nous conduit à dire que dans la pratique on distingue deux espèces de roues engrenant avec une vis sans fin. Dans la première, la partie utile de la roue se réduit à une tranche très-mince dont le plan milieu passe par l'axe de la vis : chacune des dents de la roue actuellement en contact avec la vis ne la touche qu'en un point situé dans ce plan (point qui varie d'un instant à un autre), et les dents sont terminées extérieurement, comme dans une roue droite ordinaire, par des troncatures figurant une surface cylindrique de révolution.

Dans la seconde espèce, l'ensemble de la roue, abstraction faite des entailles ou vides entre les dents, présente l'aspect d'une poulie creusée à son pourtour extérieur en une gorge qui embrasse partiellement le noyau de la vis, en laissant un espace convenable pour le jeu : une dent de la roue, en contact avec la vis, la touche simultanément en une suite de points qui forment une courbe changeant d'un instant à un autre, et sur sa roue et dans l'espace.

Etudions séparément ces deux espèces de roues.

Roue de première espèce pour vis sans fin. — Puisque les filets se déplacent et se succèdent dans le plan milieu de la roue comme les dents d'une crémaillère, le profil de ces filets et celui des dents de la roue, dans ce plan, doivent être tels, qu'ils conviendraient à une crémaillère et à sa roue cylindrique. L'un de ces deux profils peut être quelconque, sauf certaines exceptions (86), et l'autre en est une conséquence. Dans tous les cas, on commence par tracer la circonférence primitive de la roue et la droite tangente parallèle à l'axe de la vis, lesquelles, circonférence et droite, étant entraînées l'une avec la roue, l'autre avec la crémaillère fictive, doivent avoir à chaque instant la même vitesse et porter des dents d'égal pas. Mais il y a lieu de distinguer pour la pratique les deux derniers systèmes de profils

indiqués au numéro 104, savoir : le système à flancs normaux aux lignes primitives, et le système à normale constante.

Dans le système des profils à flancs normaux, le profil de la crémaillère, c'est-à-dire du filet de la vis, est composé d'un flanc ou partie intérieure en ligne droite perpendiculaire à la tangente primitive, et d'une partie extérieure, arc de cycloïde tangent au flanc droit et engendré par une circonférence, dont le diamètre est égal au rayon de la circonférence primitive ; le profil de la dent de la roue est composé d'un flanc droit dirigé suivant un rayon et d'une courbe extérieure, arc de développante de la circonférence primitive.

Dans le système des profils à normale constante, les lieux des contacts sur les deux faces des dents sont deux droites qui se croisent au point commun des deux lignes primitives et sont tangentes à une circonférence intérieure concentrique avec la circonférence primitive. Le profil du filet de la vis devient triangulaire, et celui des dents de la roue est formé de développantes de la circonférence intérieure qui vient d'être mentionnée. Ce système a pour caractère spécial que la distance de l'axe de la vis à celui de la roue peut varier dans certaines limites, sans que les mêmes profils cessent de convenir et que le rapport des vitesses soit changé.

Quant à la forme des dents de la roue hors du plan milieu, il est facile de satisfaire théoriquement à la condition qu'à chaque instant la vis et une dent de la roue se touchent en un point de ce plan. Pour cela on peut limiter la dent par une surface réglée dont voici la détermination. **A** étant, dans le plan milieu pris pour celui de la figure 65, le point de contact de la circonférence primitive **CA** de la roue et de la droite primitive **AB** de la vis dont la droite **OZ** est l'axe, si **M** est le point où se touchent le filet dont le profil est **IMn**, et la roue dont le profil est **LMN**, il suffit d'imaginer qu'on mène par ce point **M** une tangente à l'hélice qui sur la vis passe par le même point pour avoir la génératrice rectiligne correspondante de la surface réglée

dont il s'agit, surface qui, évidemment, est tangente en M à celle du filet (*).

Roues de deuxième espèce pour vis sans fin. — L'idée de la vis considérée comme une crémaillère en translation rend très-facile à concevoir la détermination de la denture de la roue comme une conséquence de la figure adoptée pour la vis. Supposons donnés : 1° le profil des filets ; 2° leur nombre ; 3° leur pas ; 4° la plus courte distance de l'axe de la vis à celui de la roue ; 5° enfin le rayon primitif de celle-ci. Imaginons que l'on coupe la vis et la roue par un plan perpendiculaire à l'axe de cette dernière. Si ce plan passe par l'axe de la vis, il rencontre les filets suivant ce que nous appelons spécialement leurs profils, formés chacun de deux parties symétriques relativement à une droite perpendiculaire à l'axe de la vis. Dans toute autre position le plan coupe les filets suivant des courbes qui, faciles à construire par points, n'ont plus la propriété de symétrie du profil principal. Dans tous les cas, le plan coupe le cylindre primitif de la roue suivant une circonférence dont le centre est dans l'axe fixe de cette roue, et la connaissance de cette circonférence et du profil particulier correspondant de la vis, crémaillère fictive, suffit pour construire les courbes que doivent présenter les dents de la roue, suivant le procédé général expliqué au numéro 88, et applicable au cas particulier où l'une des circonférences primitives considérées dans cet article a son rayon infini. Cette indication démontre, si ce n'est la facilité, au moins la possibilité de déterminer, par un nombre suffisant de coupes parallèles, la figure qui convient à la roue, d'après les cinq données que nous venons d'énumérer.

(*) Nous ne nous arrêtons pas à démontrer que, dans le système d'engrenage à flancs normaux ci-dessus indiqué, la surface réglée de la dent, dans sa partie extérieure au cylindre primitif, est un héliçoïde développable dont les intersections par des plans parallèles au plan milieu sont des développantes égales à celle du profil milieu de la dent.

111. Relations entre les diverses quantités à considérer dans une vis sans fin et sa roue. — Ces quantités sont :

dans la vis, 1° le rayon moyen ou primitif..... r'
2° le pas des hélices..... h
3° le nombre des filets distincts..... n'
4° l'angle d'inclinaison de l'hélice moyenne sur le plan perpendiculaire à l'axe..... i
5° la vitesse angulaire..... w'

dans la roue, 1° le rayon moyen ou primitif..... r
2° le pas mesuré sur la circonférence primitive, égal à la distance de milieu en milieu de deux spires voisines de la vis. p
3° le nombre de dents..... n
4° la vitesse angulaire..... w

dans la vis et la roue, la vitesse de glissement que nous nous bornerons à considérer au point de contact situé sur la perpendiculaire commune aux deux axes, de la vis et de la roue. Nous désignerons cette vitesse de glissement par... V_g.

Etablissons les équations qui existent entre ces dix quantités.

Le pas de la roue est évidemment lié au nombre de ses dents et au rayon primitif par l'équation

$$np = 2\pi r. \qquad [1]$$

Si la vis n'avait qu'un filet, le pas h de ses hélices serait égal au pas p de la roue, parce qu'il serait égal au pas de la crémaillère fictive que figure la vis. Mais s'il y a plusieurs filets distincts, c'est la distance de deux filets voisins qui est égale au pas p. On a donc

$$n'p = h. \qquad [2]$$

L'angle i est évidemment lié aux quantités précédentes par l'équation

$$\text{tang } i = \frac{h}{2\pi r'}. \qquad [3]$$

Pendant que la vis fait un tour, un point de la crémaillère fictive se déplace de la quantité h, tandis que la circonférence primitive de la roue, s'avançant de la même quantité h, tourne d'une fraction de tour qui est exprimée par $\frac{h}{2\pi r}$; c'est le rapport des vitesses angulaires, lequel d'après [1] et [2] se réduit à

$$\frac{w}{w'} = \frac{n'}{n}, \qquad [4]$$

c'est-à-dire que les vitesses angulaires sont réciproques aux nombres des dents de la roue et des filets distincts de la vis. Cette relation est analogue à celle qui a lieu dans un engrenage ordinaire. A ce propos, on remarquera que, si l'on coupe une vis à plusieurs filets distincts par un plan perpendiculaire à l'axe, la section obtenue présente l'aspect d'une roue dentée dont les dents ne sont pas symétriques. En désignant par p' le pas de cette roue mesuré sur la circonférence moyenne de la vis, dont le rayon est r', on a

$$p' = \frac{2\pi r'}{n'};$$

ce pas n'est donc pas en général égal au pas p de la roue engrenant avec la vis.

Pour calculer la vitesse de glissement relatif de la roue et de la vis, à l'instant où elles se touchent sur la perpendiculaire commune aux deux axes, exprimons (74) la distance qui, au bout du temps dt, séparera les deux points de la roue et de la vis actuellement confondus au contact. Celui de ces deux points qui appartient à la roue aura parcouru l'espace $wr\,dt$ parallèlement à l'axe de la vis, tandis que l'autre appartenant à la vis aura parcouru l'espace $w'r'\,dt$ perpendiculairement au même axe. L'espace qui les séparera est donc $\sqrt{(w^2r^2+w'^2r'^2)}\,dt$,

ce qui donne la vitesse de glissement

$$V_g = \sqrt{w^2 r^2 + w'^2 r'^2}\,; \qquad [5],$$

c'est-à-dire que la vitesse de glissement est égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés d'angle droit sont les vitesses linéaires des deux cylindres primitifs de la roue et de la vis.

En résumé, il existe cinq équations nécessaires entre les dix quantités énumérées au commencement de cet article, et parmi lesquelles n et n' doivent être des nombres entiers. Supposons, par exemple, qu'on se donne :

Le rayon moyen de la roue.....	$r = 0^m,1$;
L'inclinaison de l'hélice moyenne de la vis..	$\text{tang } i = 0,3$;
Le nombre des dents de la roue.....	$n = 50$;
Le nombre des filets distincts de la vis.....	$n' = 3$.

On conclut :

1° Le rapport des vitesses angulaires (équation [4]). $\dfrac{w}{w'} = \dfrac{3}{50}$;

2° Le pas de la roue (équation [1]). $p = \dfrac{0,62832}{50} = 0^m,01257$;

3° Le pas des hélices de la vis [2]..... $h = 0^m,0377$;

4° Le rayon moyen de la vis [3].. $r' = \dfrac{0,0377}{3,1416 \cdot 0,6} = 0^m,02$

(on aurait pu aussi bien se donner r' et calculer tang i).

5° La vitesse de glissement comparée à celle de la circonférence primitive de la roue [5].....

$$V_g = wr\sqrt{1 + \left(\frac{50}{3} \cdot \frac{0,02}{0,1}\right)^2} = 3,48\, wr.$$

112. Cas de réciprocité de l'engrenage de la vis sans fin. — Si l'on ne considère qu'au point de vue géométrique

l'engrenage de la vis sans fin, il semble que l'on peut indifféremment mener la roue par la vis (ce qui en est le cas le plus fréquent en pratique), ou la vis par la roue (comme cela se voit, par exemple, dans les tourne-broches, ou dans l'appareil de M. A. Morin servant à constater la loi de la chute des corps sous l'action de la pesanteur, où l'arbre vertical de la vis porte un volant à ailettes tournant rapidement et destiné à modérer et régulariser le mouvement du mécanisme par la résistance de l'air). Mais cette faculté réciproque n'existe pas toujours pour une vis donnée et sa roue : le frottement inévitable des surfaces en contact s'oppose à ce que la roue puisse mener la vis lorsque l'inclinaison i est trop petite, et réciproquement la vis ne pourrait pas mener la roue si cette inclinaison était trop grande. Lorsque l'angle i diffère peu de 45°, et que les surfaces sont suffisamment polies et onctueuses, on peut à volonté faire conduire l'un des deux organes par l'autre. Nous nous bornons à ces indications qui seront justifiées et complétées dans le Traité où nous nous occuperons de la théorie du frottement dans les machines.

113. Exécution mécanique de la roue d'une vis sans fin. — Le glissement mutuel des surfaces dans l'engrenage de la vis sans fin est, à cause du frottement, un inconvénient sous le rapport de l'économie de la force, qui, appliquée en un certain point de l'un des corps tournants, doit vaincre les résistances exercées en certains points de l'autre corps. Mais cette propriété de glissement a l'avantage de permettre de se servir de la vis comme d'un outil pour donner aux dents de la roue la forme qui leur convient le mieux. Pour cela on exécute la vis en acier ; on en fend les filets par des rainures étroites, à arêtes vives, et suffisamment multipliées, dont le plan milieu passe par l'axe ; puis on durcit cette pièce par la trempe. D'une autre part, on prépare la roue en lui donnant la forme d'une poulie à gorge, et l'on ébauche la denture par des entailles en nombre égal à

celui des dents qu'on veut obtenir, inclinées et assez larges pour que les filets de la vis s'y engagent, quoique incomplétement. Ensuite on installe la roue et la vis respectivement sur leurs arbres dont les axes sont à angle droit, celui de la vis étant dans le prolongement du plan milieu de la roue ; ces arbres sont d'ailleurs disposés sur leurs supports, de manière qu'on puisse peu à peu les rapprocher et les amener à la distance où ils doivent être définitivement maintenus. Ces dispositions prises, on fait tourner celui des deux corps qui doit mener l'autre ; les filets mordants de la vis liment les parties des entailles de la roue dans lesquelles ils s'enfoncent peu à peu, jusqu'à ce que celles-ci soient devenues les enveloppes des positions successives que prend la vis dans son mouvement relativement à la roue. En continuant de faire tourner les deux corps sans rapprocher les axes, et en exerçant sur la pièce menée une faible résistance, on use une face de chaque dent de manière à obtenir le jeu que l'on juge convenable. La vis qui a servi d'outil est ensuite remplacée par une autre de même profil et de même pas, mais polie et sans rainures.

Nous expliquerons plus loin le mécanisme au moyen duquel on exécute facilement et exactement une vis dont le profil et le pas sont donnés.

ENGRENAGE HYPERBOLOÏDE.

114. Préliminaires sur ce sujet. — On emploie depuis assez longtemps dans les machines de filature un genre d'engrenage que, par un trop rapide aperçu, on confond aisément avec un engrenage conique, quoiqu'il en diffère essentiellement, en ce que les axes des deux corps tournants ne sont pas dans un même plan, et sont seulement très-proches. Nous nous proposons d'exposer ici la théorie générale de ce mécanisme, sans faire aucune hypothèse restrictive, ni sur la distance des deux axes, ni sur l'angle qu'ils forment dans l'espace.

On sait (84 et 106) que le premier pas fait dans l'étude des engrenages cylindriques et coniques consiste à remarquer que la liaison entre les mouvements de deux corps, qui tournent avec un rapport constant de leurs vitesses angulaires, autour d'axes différents situés dans un même plan, s'obtient au moyen, soit de deux cylindres de friction (si les axes sont parallèles), soit de deux cônes de friction (si les axes se rencontrent), cylindres ou cônes qui se touchent le long d'une génératrice rectiligne commune, et roulent sans glisser l'un sur l'autre. Ces deux surfaces dites *primitives* une fois déterminées, d'après le rapport connu des vitesses angulaires des corps qu'elles entraînent, on les arme le plus souvent de dents, ou plutôt on remplace les surfaces primitives, devenues simplement idéales, par des dents dont les formes doivent être telles, que, lorsqu'elles se poussent mutuellement, rien ne soit changé à la loi de liaison des deux mouvements de rotation.

On a dû être ainsi conduit à demander quelles seraient les surfaces de révolution qui, en tournant autour de leurs axes respectifs et en roulant relativement l'une sur l'autre, se toucheraient suivant une ligne droite et rempliraient, dans le cas général où les axes ne sont pas dans un même plan, une fonction analogue à celle des surfaces primitives, cylindriques ou coniques, propres à deux axes parallèles ou concourants. Poser ainsi la question, c'est dire que les surfaces cherchées, si elles existent, doivent être des hyperboloïdes de révolution, et c'est en effet ce qu'a énoncé *M. Willis*, savant auteur d'un ouvrage anglais justement estimé, ayant pour titre : *Principles of mechanism*. Mais, faute d'une étude suffisamment approfondie de la question, il a inexactement indiqué la détermination de ces deux surfaces, en supposant, comme d'autres auteurs l'ont admis après lui, que la génératrice de contact doit partager la plus courte distance des deux axes en deux parties réciproques aux vitesses angulaires.

Les considérations qui suivent vont redresser cette erreur. Ce

ne sont que des déductions immédiates de la théorie exposée au chapitre II de ce Traité, sur les divers mouvements d'un système invariable.

Le problème qui se présente est celui-ci : *En supposant que deux corps solides tournent simplement et uniformément autour de deux axes respectifs, fixes dans l'espace et d'ailleurs quelconques, il s'agit de définir le mouvement de l'un de ces corps relativement à l'autre.* Ce mouvement relatif jouit évidemment des propriétés générales du mouvement absolu d'un système invariable. Ainsi :

Premièrement (68), ce mouvement, à chaque instant, a un axe central ou axe instantané de rotation et de glissement, ce qu'on exprime clairement par une image, en disant que les vitesses du corps relativement mobile (ce sont ici des vitesses relatives à l'autre corps pris pour système de comparaison) ont entre elles les mêmes relations que si ce corps était actuellement lié à une certaine vis qui se mouvrait dans son écrou relativement immobile. L'axe de la vis est l'axe instantané de rotation et de glissement ; il change de position relative d'un instant à un autre quelconque, et sans la condition de l'uniformité du rapport des vitesses angulaires absolues, le pas de la vis changerait aussi.

Secondement (70), les positions successives de l'axe instantané, relativement au second corps, formant une surface réglée, et ses positions successives dans le système invariable dont fait partie le premier corps en formant un autre, ces deux surfaces (qui dans le cas particulier qui nous occupe vont être deux hyperboloïdes) sont à chaque instant tangentes l'une à l'autre, tout le long de leur génératrice commune, et elles roulent l'une sur l'autre en glissant suivant cette génératrice, axe central du mouvement relatif à ce même instant (*).

(*) Un modèle en relief très-bien exécuté par M. Clair, habile mécanicien constructeur à Paris, d'après les instructions et les figures cotées que je

115. Vitesses de l'un des deux corps tournants relativement à l'autre. — Précisons ces généralités par leur application aux deux corps désignés, et posons d'abord les données du problème. Bien que les deux axes de rotation soient quelconques, on peut, pour faciliter le langage et les figures, les supposer dans deux plans parallèles verticaux, et considérer l'un des axes comme horizontal.

Ainsi, un corps que, pour abréger, nous appelons corps C' tourne autour de l'axe A'B' (fig. 66), supposé horizontal et dirigé de gauche à droite, avec une vitesse angulaire représentée par la longueur A'B', et par le nombre w'.

Un autre corps C tourne autour de AB, supposé dans un plan vertical parallèle à A'B', avec une vitesse angulaire représentée par la longueur AB et par le nombre $-w$, le sens de la rotation de C autour de AB étant contraire à celui de la rotation w' de C' autour de A'B'.

La plus courte distance ou perpendiculaire commune aux deux axes est l'horizontale $AA' = p$.

L'angle de AB et de l'horizontale Ab, parallèle à A'B' et de même sens, est désigné par $BAb = \alpha$.

Pour étudier, au point de vue des vitesses actuelles, le mouvement du premier corps relativement au second, imitant ce que nous avons déjà fait au numéro 75, imprimons à l'ensemble des deux corps en mouvement une rotation additionnelle et contraire à $-w$. Le second corps C est alors réduit au repos, et le corps C' a un mouvement composé de w' autour de A'B', et de w autour de AB.

lui ai remises en février 1860, modèle dont un exemplaire appartient au Conservatoire des Arts et Métiers, confirme au besoin l'exactitude de la théorie exposée ci-après. Il est bien entendu qu'en pratique un engrenage de ce genre se compose de deux tronçons sensiblement coniques, et que les surfaces étendues du modèle n'y sont que pour faire voir et comprendre quelles sont sur ces surfaces primitives les directions des génératrices qui doivent être les lignes de naissance des surfaces courbes des dents.

Cherchons l'axe central de ce mouvement composé. Pour cela (66), dans le corps C' introduisons autour d'une droite passant par A' (fig. 67) et parallèle à AB (droite qui étant projetée horizontalement suivant A'B' et verticalement suivant AB, sera appelée la droite (AB, A'B')), deux rotations de grandeurs égales entre elles et de sens opposés : l'une $w_1 = w$, l'autre $w_2 = -w$.

La rotation w autour de AB et la rotation w_2 ou $-w$ autour de (AB, A'B'), appartenant ainsi au mouvement relatif du corps C', forment (64) un couple de rotations équivalent à une translation perpendiculaire au plan A'AB, savoir, parallèlement à la droite AV de la figure

$$V = pw. \qquad [1]$$

Les deux rotations w' et w_1, dont les axes représentatifs se coupent en A' et se projettent en vraie grandeur en Ab et AB, sont équivalentes à une rotation unique W, dont l'axe représentatif se projetterait horizontalement suivant AB, et se projette verticalement et en vraie grandeur en AW, diagonale du parallélogramme BAbW, dont les côtés sont égaux et parallèles aux axes représentatifs des rotations w et w'.

Désignons par β et β' les angles BAW, bAW, que la diagonale AW fait avec les axes AB et A'B', et nommons α leur somme : les trois équations

$$\beta + \beta' = \alpha, \quad \frac{w}{\sin \beta'} = \frac{w'}{\sin \beta} = \frac{W}{\sin \alpha}, \qquad [2]$$

feront d'abord connaître les angles β et β', quand le rapport des vitesses angulaires w et w', et l'angle α des deux axes seront donnés, puisqu'on a, par exemple,

$$w \sin \beta = w' \sin (\alpha - \beta) = w' (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta),$$

d'où

$$\cot\beta = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{w}{w'} + \cos\alpha\right), \qquad [3]$$

et de même

$$\cot\beta' = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{w'}{w} + \cos\alpha\right);$$

puis on calculera, à volonté, soit

$$\frac{W}{w'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}, \quad \text{soit} \quad \frac{W}{w} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'}.$$

La translation V perpendiculaire au plan **BAA'**, et la rotation W dont l'axe passe par **A'**, étant ainsi obtenues, on en conclut, par le moyen connu (67) et comme nous allons le répéter, la direction de l'axe central, et d'abord la vitesse de glissement V_g qui s'y rapporte.

La vitesse V, perpendiculaire à **AB**, se décompose en deux, l'une suivant **AW**, et l'autre perpendiculaire à cette même diagonale. On a pour la première qui est la vitesse de glissement, en ayant égard aux équations [1] et [2],

$$V_g = V\sin\beta = pw\sin\beta = pw'\sin\beta', \qquad [4]$$

formule dont l'interprétation géométrique est très-facile, et sera d'ailleurs indiquée tout à l'heure. On peut en conclure, d'après la relation [3], l'expression de la vitesse de glissement en fonction des quatre données p, α, w et w'.

$$V_g = \frac{pww'\sin\alpha}{\sqrt{w^2 + w'^2 + 2ww'\cos\alpha}}.$$

La seconde composante de V, perpendiculaire à **AW**, est

$V \cos\beta = pw \cos\beta$, translation qui se compose avec la rotation W, autour de l'axe (AW, A'B'), en une rotation simple, dont l'axe, parallèle à AW et ayant une vitesse nulle, coupe la droite AA' en un point T, situé à une distance de A' qui, désignée par $A'T = a'$, est déterminée par l'équation

$$Wa' - pw \cos\beta = 0.$$

La distance TA, désignée par a, serait, à cause de l'analogie des notations, donnée par l'équation

$$Wa - pw' \cos\beta' = 0,$$

ce qu'on vérifie d'ailleurs en ajoutant ces dernières équations, qui donnent la relation $Wp = p\,(w \cos\beta + w' \cos'\beta')$ évidente d'après le parallélogramme BAbW.

De là on conclut, par division et en recourant aux équations [2],

$$\frac{a}{a'} = \frac{w' \cos\beta'}{w \cos\beta} = \frac{\sin\beta \cos\beta'}{\sin\beta' \cos\beta},$$

et finalement

$$\frac{a}{a'} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta'}. \qquad [5]$$

Ainsi se trouvent déterminées par les équations [2] et [5] la position et la direction de l'axe instantané de rotation et de glissement du mouvement du corps C' relativement au corps C; la dernière équation [2] fait connaître l'intensité W de la rotation relative, et l'équation [4] donne la vitesse de glissement V_g qui se compose avec cette rotation.

116. Construction graphique des formules précédentes.

— Les équations que nous venons d'obtenir s'interprètent géométriquement d'une manière très-simple.

Connaissant l'angle α des deux axes A'B' et AB, $p = AA'$ leur plus courte distance, w' et w les vitesses angulaires des deux corps autour de ces axes, exécutez les constructions suivantes :

1° Faites le parallélogramme bABW dont les côtés Ab et AB sont parallèles aux axes, proportionnels aux valeurs absolues des vitesses angulaires w' et w, et dirigés de manière que, l'un des corps, C', étant supposé tourner autour d'une parallèle à Ab dans le sens positif, l'autre corps C tourne autour de AB dans le sens négatif : la diagonale AW sera *parallèle* à l'axe instantané de rotation et de glissement de chacun des deux corps relativement à l'autre, et représentera, pour la *grandeur* et le *sens*, la vitesse angulaire du premier corps relativement au second.

2° Menez, perpendiculairement à la diagonale, la droite tellement située que sa partie aa' interceptée dans l'angle bAB du parallélogramme soit égale à la distance p des deux axes : elle se trouvera divisée, à sa rencontre t avec la diagonale, en deux parties at et a't respectivement égales aux distances $AT = a$ et $AT' = a'$, des points A et A' au point T, où la perpendiculaire AA' commune aux deux axes de rotation est coupée perpendiculairement par l'axe central instantané du mouvement relatif des deux corps. En effet, les deux distances at et a't étant respectivement égales à At.tang β et à At.tang β' satisfont à l'équation [5].

3° Portez de A en a_1 sur la diagonale une longueur égale à p : si vous imaginez que le point a_1 ainsi obtenu, et dont les distances à Ab et à AB sont $p \sin \beta'$ et $p \sin \beta$, tourne, soit autour de Ab avec la vitesse angulaire w', soit autour de AB avec la vitesse angulaire w, la vitesse linéaire qu'aura ce point a_1 est égale à la vitesse de glissement V_g, conformément à l'équation [4].

117. Mouvement continu de l'un des corps relativement à l'autre. Hyperboloïdes primitifs. — Nous venons de reconnaître la loi du mouvement du corps C′ relativement au corps C, à un instant quelconque, c'est-à-dire la loi qui, à cet instant, lie entre elles les vitesses relatives du premier corps. Il ne s'agit plus que de voir ce que devient, d'un instant à un autre, ce même mouvement relatif.

Le point A reste immobile; le point A′ qui, dans l'espace, est fixe aussi, tourne, dans son mouvement relatif, autour de l'axe AB, en vertu de la rotation additionnelle w attribuée au système des deux corps pour détruire la rotation $-w$ du corps C autour de ce même axe AB. Le point A′ décrit donc, relativement au corps C, un cercle autour de A, dans un plan perpendiculaire à AB. Le point T en fait autant; et l'axe central instantané passant à chaque instant par ce point, étant toujours perpendiculaire à AT et faisant toujours avec une parallèle à AB l'angle invariable β, décrit par conséquent un hyperboloïde de révolution dont le cercle de gorge a pour rayon la distance a.

Ce raisonnement, s'appliquant aussi bien à l'axe A′B′ qu'à AB, on voit que le même axe central instantané décrit, relativement au corps C′, autour de A′B′, un hyperboloïde dont le cercle de gorge a pour rayon la distance $a' = A'T$, et dont la génératrice fait avec une parallèle à l'axe A′B′ l'angle β'.

Or, suivant la proposition générale démontrée au numéro 70, les deux hyperboloïdes ainsi engendrés par l'axe central instantané jouissent de la propriété d'être continuellement tangents tout le long de cette droite, et de rouler l'un sur l'autre en glissant suivant cette même génératrice. Nous les appelons *hyperboloïdes roulants* ou *primitifs*, par analogie avec les cylindres et cônes primitifs des engrenages ordinaires.

Quand on connaîtra l'angle α des deux axes, leur distance p et le rapport des vitesses angulaires w' et w, les constructions indiquées au numéro précédent pourront servir à déterminer : 1° les angles β et β' de la génératrice commune des deux

hyperboloïdes avec leurs axes, 2° les rayons a et a' des cercles de gorge, 3° la vitesse de glissement donnée par la formule [4] et correspondante à une vitesse angulaire donnée.

118. Equations des hyperboles méridiennes des hyperboloïdes primitifs. — Prenant l'axe des x suivant **AB** (fig. 68) et l'axe des y suivant une perpendiculaire passant par **A**, attendu que **AW** est une asymptote de l'hyperbole méridienne verticale de l'hyperboloïde dont l'axe est **AB**, on a pour exprimer cette courbe

$$y = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + x^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{a}{\operatorname{tang}\beta},$$

formules où l'on peut mettre pour tang β sa valeur déduite des équations [2], comme on l'a vu ci-dessus; ou bien, si l'on se contente des constructions graphiques indiquées au numéro 116, on reconnaît immédiatement que b est la longueur **At** de la figure 67.

La méridienne de l'hyperboloïde dont l'axe est **A'B'** est obtenue de même par les équations

$$y' = \pm \frac{a'}{b'}\sqrt{b'^2 + x'^2} \quad \text{et} \quad b' = \frac{a'}{\operatorname{tang}\beta'}.$$

Or, il résulte de l'équation [5] que les deux demi-axes non transverses b et b' sont égaux, de sorte que l'équation de la méridienne relative à l'axe **A'B'** peut s'écrire ainsi

$$y' = \pm \frac{a'}{b}\sqrt{b^2 + x'^2};$$

et si l'on compare les deux ordonnées y et y' qui correspondent à des abscisses x et x' égales entre elles, on trouve la proportion très-simple et commode pour construire ou calculer l'une des courbes, quand on a l'autre

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{a'}.$$

Si l'on veut n'employer que le calcul pour déterminer les axes principaux des deux hyperboles méridiennes, on commencera par calculer le rapport de a à a', d'après les équations [5] et [3], savoir :

$$\frac{a}{a'} = \frac{\dfrac{w'}{w} + \cos\alpha \text{ (*)}}{\dfrac{w}{w'} + \cos\alpha},$$

d'où étant donné $a + a' = p$, on conclura a et a' ; ou bien directement

$$a = p\,\frac{\dfrac{w'}{w} + \cos\alpha}{\dfrac{w}{w'} + \dfrac{w'}{w} + 2\cos\alpha} \quad \text{et} \quad a' = p\,\frac{\dfrac{w}{w'} + \cos\alpha}{\dfrac{w}{w'} + \dfrac{w'}{w} + 2\cos\alpha};$$

puis on calculera l'axe non transverse d'après la formule [3] :

$$b = a\cos\beta = \frac{p}{\sin\alpha}\,\frac{\left(\dfrac{w}{w'} + \cos\alpha\right)\left(\dfrac{w'}{w} + \cos\alpha\right)}{\dfrac{w}{w'} + \dfrac{w'}{w} + 2\cos\alpha}.$$

119. Relation entre les coordonnées rectangulaires des hyperboles et la longueur de l'asymptote. — Une autre détermination utile est celle de l'abscisse x et de l'ordonnée y de l'une des hyperboles méridiennes, qui correspondent à une longueur AM d'asymptote. M étant un point de contact des deux hyperboloïdes, y est sa distance à l'axe AB de l'un deux, et par conséquent c'est le rayon du parallèle passant par ce

(*) Cette équation qui, dans le cas où les axes sont rectangulaires, devient $\frac{a}{a'} = \frac{w'^2}{w^2}$, constate l'erreur signalée au numéro 114.

point sur le même hyperboloïde ; x est la distance du parallèle au cercle de gorge ; AM est égale à la distance, suivant la génératrice de contact, du point M au point où elle rencontre ce cercle de gorge.

En désignant AM par z, on a pour la méridienne de l'hyperboloïde autour de AB,

$$x = z\cos\beta, \quad \text{et par suite} \quad y = \mp\sqrt{b^2\operatorname{tang}^2\beta + z^2\sin^2\beta},$$

et, pour l'autre hyperbole,

$$x' = z\cos\beta' \quad \text{et} \quad y' = \pm\sqrt{b^2\operatorname{tang}^2\beta' + z^2\sin^2\beta'}.$$

On en conclut que le rapport $\frac{y}{y'}$ des rayons des deux parallèles ayant un point commun, rapport égal à $\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta'}$ quand on fait $z=0$ (c'est-à-dire quand y et y' sont les rayons a et a' des cercles de gorge), approche d'être égal à $\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}$, c'est-à-dire à $\frac{w'}{w}$, à mesure que z augmente, sans jamais atteindre cette valeur.

120. Contact des deux hyperboloïdes. — La théorie de la composition des mouvements, qui nous a dirigés dans cette recherche, nous donne la certitude (70) que les deux hyperboloïdes, tels qu'ils se sont trouvés déterminés, sont tangents tout le long de leur génératrice commune. Mais il sera peut-être intéressant de vérifier ce fait directement, par des considérations purement géométriques.

Soit projeté en M et en M' (fig. 69) un point quelconque de la génératrice commune. Désignons par z sa distance au point T. Ainsi $z = \text{AM}$. Ce point se trouvant sur l'hyperboloïde dont

l'axe est l'horizontale A'B', appartient à un cercle vertical dont le centre est O', et dont le rayon est égal à O'M'$_1$, obtenu par rabattement en faisant M'M$_1$ = mM. La tangente au cercle en ce même point est, en rabattement, M'$_1$P' perpendiculaire à O'M'$_1$. Sa trace dans le plan horizontal AA'B' est donc P', et la trace horizontale du plan tangent au premier hyperboloïde en (M, M') (lequel plan tangent contient la génératrice qui passe en T) est par conséquent la droite TP'.

Le même point (M, M') appartient à un cercle du deuxième hyperboloïde, dont le centre est O et dont le rayon est M$_1$O$_1$ obtenu en rabattant LO en LO$_1$ et L (M', M) en L'M$_1$. La tangente au cercle en ce même point est, en rabattement, M$_1$P perpendiculaire à M$_1$O$_1$, et la trace horizontale du plan tangent au deuxième hyperboloïde en (M', M) est la droite TP joignant le point T au point où la tangente M$_1$P rencontre LL'.

Il s'agit de savoir sous quelle condition les deux plans tangents se confondent. Pour cela écrivons

$$\frac{P'M'}{TM'} = \frac{PL'}{TL'}, \qquad [6]$$

et remarquons que ces quatre longueurs s'expriment facilement en fonctions des angles α, β, β', et des distances a, a' et z :

1° Le triangle rectangle P'M'$_1$O' donne

$$P'M' = \frac{(M'M'_1)^2}{M'O'} = \frac{(Mm)^2}{M'O'} = \frac{z^2 \sin^2 \beta'}{a'};$$

2° On a évidemment

$$TM' = Am = z \cos \beta';$$

3° Les triangles semblables PL'M$_1$ et O$_1$M$_1$m$_1$ donnent

$$PL' = \frac{O_1m_1 . M_1M'_1}{M_1m_1},$$

d'où, à cause de $O_1m_1 = OM = z \sin\beta$, de $M_1m_1 = a$ et de $M_1M'_1 = LM = \dfrac{Mm}{\cos a} = \dfrac{z\sin\beta}{\cos\alpha}$, on conclut

$$PL' = \frac{z\sin\beta}{a} \cdot \frac{z\sin\beta}{\cos}\,;$$

4° On a enfin

$$TL' = AL = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{z\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

En substituant ces quatre expressions dans l'équation [6], on obtient pour la condition cherchée, après réduction

$$\frac{\operatorname{tang}\beta'}{a'} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{a},$$

c'est-à-dire l'équation [5] indépendante de z, ce qui prouve que le contact des deux surfaces précédemment déterminées existe tout le long de la génératrice commune. On voit aussi que deux hyperboloïdes de révolution pris arbitrairement pourraient ne pas satisfaire à cette condition, puisque, le rapport des rayons de gorge étant donné, ainsi qu'un des angles β et β', l'autre doit avoir une certaine valeur.

121. Cas particulier où les axes de rotation sont rectangulaires.— Il suffit, pour obtenir les formules relatives à ce cas, de faire $\alpha = 90°$ dans celles qui ont été établies ci-dessus.

On a donc, au lieu de [2],

$$\frac{w}{\cos\beta} = \frac{w'}{\sin\beta} = W, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\beta = \frac{1}{\operatorname{tang}\beta'} = \frac{w'}{w}.$$

La formule [3] devient

$$V_g = pw\sin\beta = pw'\cos\beta = \frac{pww'}{\sqrt{w^2 + w'^2}}.$$

L'équation [5] donne

$$\frac{a}{a'} = \operatorname{tang}^2\beta = \frac{w'^2}{w^2}, \quad \text{d'où} \quad a = p\,\frac{w'^2}{w^2+w'^2}.$$

La valeur de b (113) devient

$$b = \frac{aw}{w'} = \frac{a'w'}{w} = \sqrt{aa'}.$$

L'hyperbole méridienne, dont la vitesse angulaire est w, a toujours pour équation

$$y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+x^2}$$

et son paramètre est $\frac{2b^2}{a}$. Mais, dans le cas particulier dont il s'agit, on a

$$\frac{2b^2}{a} = 2a'.$$

De même, l'hyperbole méridienne, dont la vitesse angulaire est w', a pour paramètre

$$\frac{2b^2}{a'} = 2a.$$

Or, on sait, et il est facile de vérifier qu'au sommet d'une section conique quelconque, le rayon de courbure est égal au demi-paramètre (c'est la sous-normale sur le diamètre au sommet); donc,

Quand les axes sont rectangulaires, *le rayon de courbure du fond de la gorge de chacun des hyperboloïdes est égal au rayon du cercle de gorge de l'autre hyperboloïde.*

Les deux surfaces sont, s'il est permis d'employer cette

image vulgaire, en selle l'une sur l'autre, de la manière la plus intime.

122. Engrenage hyperboloïde. — Les deux hyperboloïdes de révolution tangents, quel que soit l'angle de leurs axes, ont une analogie frappante avec les cônes et les cylindres roulants, employés comme organes de liaison de mouvement entre deux corps tournant autour de deux axes fixes situés dans un même plan, avec des vitesses augulaires qui restent en rapport constant. Si, en réduisant la distance p à zéro, on fait concourir les deux axes sous un angle quelconque, les hyperboloïdes deviennent des cônes; si, en laissant à la distance p une valeur quelconque, on réduit l'angle α à zéro, les deux axes devenant parallèles, les deux hyperboloïdes dégénèrent en cylindres. Dans ces deux cas particuliers, suivant la formule [4], la vitesse de glissement V_g devient nulle.

En général, supposé qu'on exécute en reliefs solides deux troncs d'hyperboloïdes tangents (fig. 70), analogues à des troncs de cônes se terminant à des plans menés perpendiculairement aux axes par les deux extrémités d'une portion MM′ de la génératrice commune; qu'on y trace des stries rectilignes, fines et très-rapprochées entre elles, suivant des génératrices qui doivent être successivement des lignes de contact; et que ces stries également espacées sur chaque hyperboloïde soient en nombres inversement proportionnels aux vitesses angulaires : elles rempliront le mieux possible, pendant la rotation des deux troncs autour de leurs axes, une fonction analogue à celle des dents très-multipliées d'un engrenage conique, mais avec deux différences essentielles :

La première, c'est que ces stries, pendant le mouvement, glissent longitudinalement avec une vitesse qui croît proportionnellement à la distance p des deux axes, quand on ne fait varier ni l'angle α ni les vitesses angulaires w et w' (formule [4]);

La seconde, c'est que ces stries ou génératrices, devant être

en nombres réciproques aux vitesses angulaires, ne sont pas espacées de quantités égales sur deux circonférences qui ont un point commun sur la génératrice de contact, puisque (119) les rayons de ces circonférences sont dans un rapport qui varie entre $\frac{\tan g\ \beta}{\tan g\ \beta'}$ et $\frac{\sin \beta}{\sin \beta'}$ ou $\frac{w'}{w}$ sans atteindre cette dernière limite. En d'autres termes, le rapport des *pas* sur les deux circonférences ayant un point commun, approche de l'unité à mesure que ces circonférences augmentent, mais n'a nulle part cette valeur.

123. Forme et exécution des dents de l'engrenage hyperboloïde. — En général, dans ce cas comme dans ceux des engrenages cylindriques ou coniques, la forme des dents de l'une des roues est théoriquement arbitraire, pourvu que les surfaces des dents de l'autre roue soient les enveloppes des diverses positions relatives des dents de la première, pendant que les deux roues tournent avec le rapport donné de leurs vitesses angulaires. Mais si l'on veut que la vitesse du glissement mutuel des dents en contact soit aussi petite qu'il est possible, et que ce contact ait lieu simultanément en plusieurs points, il faut qu'à l'instant où l'un de ces points se trouve sur la génératrice commune des deux hyperboloïdes primitifs, les autres points de contact y soient également. De là découle naturellement l'idée de terminer les dents par des surfaces réglées, qui ont pour l'une des positions de leurs génératrices rectilignes cette génératrice commune des deux hyperboloïdes.

La détermination rigoureuse de ces surfaces (qui se réduisent à des cylindres ou à des cônes, lorsque les axes de rotation sont parallèles ou concourants) serait un problème trop compliqué pour la pratique. Mais la propriété du glissement inévitable dans l'engrenage hyperboloïde, peut fournir un moyen d'exécution mécanique, analogue à celui qui a été indiqué (113) au sujet de la roue engrenant avec une vis sans fin. Si, par exemple, on

commence par ébaucher les dents, en adoptant pour leurs coupes transversales des profils semblables à ceux d'un engrenage conique, et en dirigeant les naissances des faces courbes suivant des génératrices des hyperboloïdes primitifs; qu'ensuite, lès roues étant montées sur leurs arbres, on les fasse tourner assez rapidement; le glissement des surfaces usera leurs parties trop saillantes et indiquera à l'ouvrier ce qui lui restera à faire pour perfectionner son travail.

§ 4.

ÉTUDE COMPLÉMENTAIRE SUR LA LIAISON DE DEUX CORPS SOLIDES DONT LES ROTATIONS AUTOUR DE DEUX AXES FIXES SONT EN RAPPORT VARIABLE. CAS PARTICULIER D'UNE ROTATION ET D'UNE TRANSLATION VARIÉE (*).

LIAISON DE DEUX ROTATIONS.

124. Cylindres roulants non circulaires. — Lorsque deux corps solides tournent respectivement autour de deux axes fixes parallèles, on voit, en considérant leur mouvement relatif et en s'appuyant sur les théorèmes établis aux numéros 47 et 70, qu'ils se meuvent comme s'ils étaient respectivement liés à deux surfaces cylindriques qui, roulant sans glisser l'une sur l'autre, auraient à chaque instant leur génératrice de contact dans le plan des deux axes de rotation.

L'étude du mouvement des deux corps se réduit à celle du mouvement des sections droites des deux cylindres roulants, dans un même plan perpendiculaire aux axes de rotation. Nous les nommons *courbes primitives*, par analogie avec les circonférences primitives des engrenages ordinaires.

(*) Ce paragraphe est destiné à compléter les trois précédents dans lesquels ont été étudiés plus spécialement les cas où le rapport des vitesses angulaires des deux corps en contact est constant.

Soient C et C_1 (fig. 71), les centres de rotation de ces deux courbes; O et O_1 les deux points qui se trouvaient en contact sur la droite CC_1, à l'instant indiqué par $t=0$; T, le point de contact sur cette même droite à la fin du temps t; α et α_1, les angles OCT et O_1C_1T, déplacements angulaires des deux corps pendant ce temps t; soient enfin r et r_1, les deux distances ou rayons vecteurs variables, ayant actuellement les valeurs CT et C_1T, dont nous désignons la somme constante CC_1 par c.

De ce que les deux courbes se touchent continuellement sur la droite CC_1, il s'ensuit (80) : 1° Que les deux vitesses angulaires sont réciproques aux rayons r et r_1, ce qui s'exprime par l'équation

$$r\frac{d\alpha}{dt}=r_1\frac{d\alpha_1}{dt}, \quad \text{ou simplement} \quad rd\alpha=r_1d\alpha_1 ;$$

2° Que les deux courbes roulent sans glissement l'une sur l'autre, de sorte que les deux arcs OT et O_1T sont égaux; et cette dernière propriété entraîne réciproquement les deux autres (contact sur CC_1 et rapport des vitesses).

125. Détermination des courbes primitives. — I. Cette détermination peut être obtenue comme une conséquence de la loi, supposée donnée, du mouvement des deux corps que les deux courbes entraînent. En effet, les angles α et α_1 étant décrits dans le temps t, posons les deux équations suivantes (en désignant par les notations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ deux fonctions quelconques) :

$$\alpha=\mathcal{F}(t) \quad \text{et} \quad \alpha_1=\mathcal{F}_1(t) ;$$

chacune d'elles est l'équation du mouvement de rotation de l'un des corps ou de l'une des deux courbes. Les vitesses angulaires de ces mêmes corps, à la fin du temps t, sont :

$$w=\frac{d\alpha}{dt}=\mathcal{F}'(t) \quad \text{et} \quad w_1=\frac{d\alpha_1}{dt}=\mathcal{F}_1'(t);$$

et puisqu'elles sont réciproques aux distances r et r_1, on a

$$r\mathcal{F}'(t)=r_1\mathcal{F}_1'(t),$$

d'où, à cause de $r+r_1=c_1$, on conclut :

$$r=c\frac{\mathcal{F}_1'(t)}{\mathcal{F}'(t)+\mathcal{F}_1'(t)} \quad \text{et} \quad r_1=c\frac{\mathcal{F}'(t)}{\mathcal{F}'(t)+\mathcal{F}_1'(t)},$$

équations qui, combinées avec les deux ci-dessus, $\alpha=\mathcal{F}(t)$ et $\alpha_1=\mathcal{F}_1(t)$, conduisent, par l'élimination de t, aux équations en coordonnées polaires des courbes OT et O_1T. Si l'élimination est trop difficile, on peut assigner à t une suite de valeurs suffisamment rapprochées entre elles, et, par les formules précédentes, calculer les valeurs simultanées correspondantes de r et α pour l'une des courbes, et de r_1 et α_1 pour l'autre.

II. *Une des courbes primitives et la distance des centres étant données, l'autre courbe s'ensuit.* — En effet, supposons que pour l'équation de la courbe donnée on ait α en une fonction Φ de r :

$$\alpha=\Phi(r).$$

En substituant $\mathrm{d}\alpha=\Phi'(r)\,\mathrm{d}r$ et ensuite $r=c-r_1$ dans l'équation $r\mathrm{d}\alpha=r_1\mathrm{d}\alpha_1$, on obtient

$$\mathrm{d}\alpha_1=-\frac{c-r_1}{r_1}\Phi'(c-r_1)\mathrm{d}r_1,$$

d'où l'on conclurait par une quadrature α_1 en fonction de r_1, ou tout au moins autant de valeurs approximatives qu'on voudrait de l'angle α_1 correspondantes à certaines valeurs du rayon vecteur r_1.

III. *Procédé graphique.* — On peut déterminer deux courbes primitives se convenant mutuellement par tout autre moyen qui

assure que ces courbes, en tournant autour de deux points fixes, se toucheront constamment sur la droite menée par les deux centres de rotation, ou qu'elles rouleront sans glisser l'une sur l'autre. De cette observation résulte un procédé graphique pour construire l'une des courbes primitives lorsque l'autre est donnée.

Soit $TMM_1M_2\ldots$ (fig. 72), cette courbe donnée, qui doit tourner autour du point C, et soit C', sur le prolongement de CT, le centre de rotation de la courbe à construire. On prend sur la première les points T, M, M_1, $M_2\ldots$ assez rapprochés pour que les arcs qui les joignent se confondent sensiblement avec leurs cordes. On détermine le point M' par la double condition $TM' = TM$ et $C'M' = CC' - CM$; puis le point M'_1 par les conditions $M'M'_1 = MM_1$ et $C'M'_1 = CC' - CM_1$; puis le point M'_2 par $M'_1M'_2 = M_1M_2$ et $C'M'_2 = CC' - CM_2$; ainsi de suite. Il est clair que les deux courbes rouleront sans glisser l'une sur l'autre.

IV. *Courbes déduites les unes des autres.* — Remarquons enfin que, lorsqu'on a construit deux portions de courbes qui satisfont aux conditions de deux courbes primitives correspondant l'une à l'autre, on en peut trouver deux autres, en donnant à celles-ci les mêmes rayons vecteurs, mais en diminuant ou en augmentant, dans un rapport constant, les angles qu'ils forment; de sorte que si $\alpha = \mathcal{F}(r)$ et $\alpha_1 = \mathcal{F}_1(r_1)$ sont les équations des premières courbes, $n\beta = \mathcal{F}(r)$ et $n\beta_1 = \mathcal{F}_1(r_1)$ sont celles des secondes, qui, en effet, satisfont aux équations $r\,d\beta = r_1\,d\beta_1$ et $r + r_1 = c$, si n est un nombre constant et si β et β_1 sont les angles des rayons vecteurs avec deux axes d'origine correspondants.

126. Exemples. — I. *Spirales logarithmiques.* — Pour que les deux courbes se touchent en T (fig. 73), il faut que le prolongement de la courbe OT, à partir de T, fasse avec le rayon vecteur CT prolongé le même angle que le prolongement de la

courbe TO_1 avec celui de C_1T. Or, un moyen simple de satisfaire à cette condition, c'est que, en tout point **M**, la première courbe **OMT**, décrite dans le sens allant de **O** vers **T**, fasse avec le prolongement du rayon vecteur un angle **SMR** qui ait une valeur constante β; ce qui exigera que la seconde courbe, décrite dans le sens TM_1O_1, ait la même propriété, c'est-à-dire que l'angle $S_1M_1R_1$ soit aussi égal à l'angle constant β.

Cela posé, soient le rayon vecteur $CM = r$ et l'angle $OCM = \alpha$, coordonnées polaires de la courbe **OM**. L'angle **SMR** a pour tangente trigonométrique $\frac{r\,d\alpha}{dr}$. La condition dont il s'agit est donc

$$\frac{r\,d\alpha}{dr} = \operatorname{tang}\beta\,,$$

ou, pour préparer l'intégration,

$$d\alpha = \operatorname{tang}\beta\frac{dr}{r}\,,$$

et, par suite,

$$\alpha = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\log e}\log\frac{r}{r_0} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{0{,}43429}\log\frac{r}{r_0}\,,$$

r_0 étant le rayon vecteur **CO**, à partir duquel est compté l'angle α, exprimé par le rapport de l'arc circulaire **ON**, qui le mesure au rayon **CO**.

La courbe exprimée par cette équation, et dont une propriété est que l'angle α est proportionnel au logarithme du rapport du rayon vecteur r à sa valeur initiale r_0, est connue sous le nom de *spirale logarithmique*.

Il résulte de là que l'on obtient deux courbes primitives, pouvant se conduire l'une l'autre par contact sans glissement, en

prenant deux spirales logarithmiques ayant pour pôles les centres de rotation C et C_1, et caractérisées d'ailleurs par le même angle β.

Si l'on fait, par exemple, $\frac{\operatorname{tang}\beta}{\log e} = 3$, ce qui correspond approximativement à $\operatorname{tang}\beta = 1{,}30$, l'équation des courbes devient

$$\frac{\alpha}{3} = \log\frac{r}{r_0},$$

de sorte qu'aux valeurs ci-après de α en progression arithmétique, répondent les valeurs suivantes de $\frac{r}{r_0}$ en progression géométrique :

$\alpha = -0{,}5$	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0,0	0,1	0,2
$\frac{r}{r_0} = 0{,}681$	0,736	0,794	0,858	0,926	1,000	1,080	1,166
$\alpha = 0{,}3$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\frac{r}{r_0} = 1{,}259$	1,359	1,468	1,585	1,711	1,848	1,995	2,154

ce qui permet de construire par points la courbe OMT, à laquelle doit être égale la courbe TM_1Q_1 décrite en tournant dans le même sens (dans la figure ce sens est de gauche à droite par-dessous). Quelle que soit la distance des deux pôles ou centres de rotation C et C_1, deux courbes ainsi tracées pour un même angle β se conviennent comme courbes primitives. Seulement il sera inutile de prolonger aucune des deux courbes au delà du point dont le rayon vecteur est égal à la distance CC'_1.

II. *Ellipses.* — Deux ellipses égales AMB..., AM_1B_1... (fig. 74), tournant autour de deux foyers F et F_1 disposés de manière que leur distance FF_1 soit égale au grand diamètre AB, roulent l'une sur l'autre sans glisser ; car si l'on considère deux

arcs égaux AM et AM_1, il est clair que F′ étant le second foyer de la première ellipse, on a $M_1F_1 = MF'_1$, et par conséquent $FM + M_1F_1 = AB$. Ainsi pour deux points M et M_1 quelconques satisfaisant à l'égalité

$$\int (dr^2 + r^2 d\alpha^2) = \int (dr_1^2 + r_1^2 d\alpha_1^2)$$

on a $r + r_1 = c$; on a donc aussi $r d\alpha = r_1 d\alpha_1$.

Du reste, il est facile de voir, surabondamment, que les angles des deux ellipses en M et en M_1 avec les rayons vecteurs MF et M_1F_1, ont l'égalité nécessaire pour le contact des deux courbes, à l'instant où les deux points M et M_1 coïncident.

Dans la situation indiquée par la figure, le rapport des vitesses angulaires autour des axes F et F_1 est $\frac{F_1A}{FA}$; et après une demi-révolution, ce rapport parvient graduellement à la valeur inverse

$$\frac{F_1B_1}{FB} \quad \text{ou} \quad \frac{FA}{F_1A},$$

puis il recroît et repasse dans la demi-révolution suivante par les valeurs précédentes en ordre inverse.

III. *Courbes déduites de l'ellipse.* — Traçons (fig. 74) autour de F divers rayons F0, F1, F2..., F6 dont les angles sont égaux et équivalent ensemble à deux angles droits. Formons un angle quelconque afb (fig. 75), et divisons-le en autant d'angles égaux que nous en avons fait de FA à FB (fig. 74). Portons les longueurs f0, f1, f2..., f6 respectivement égales à F0, F1, F2..., F6. Prolongeons fa en faisant $af_1 = AF_1$; faisons $af_1b_1 = afb$, et répétons la construction précédente qui donne la courbe a54...1b_1 égale à la courbe a12...5b. Ces deux courbes forment, d'après la remarque IV du numéro 125, deux courbes primitives, propres, dans leur rotation autour des points

fixes f et f_1 à faire passer graduellement le rapport des vitesses de la valeur $\frac{af_1}{af}$ à la valeur inverse $\frac{f_1b_1}{fb}$ ou $\frac{af}{af_1}$.

Maintenant, pour obtenir deux courbes primitives susceptibles de faire, chacune en même temps, une révolution entière, aux courbes $a12345b$ et $a54321b_1$ faisons succéder deux arcs circulaires bb' autour de f, et $b_1b'_1$ autour de f_1, puis deux courbes $b'54321a'$ et $b'_112345a'_1$, respectivement symétriques aux courbes $b54321a$ et $b_112345a$, enfin deux arcs circulaires $a'a$ et a'_1a; disposons d'ailleurs ces courbes de manière que les arcs de cercles bb' et aa' de rayons différents soient d'égales longueurs, chose facile, car en appelant r le rayon fa, r_1 le rayon $fb = f_1a$, x l'angle afa', et y l'angle bfb', on exprime la condition dont il s'agit par $rx = r_1y$ ou $(r + r_1)x = r_1(x + y)$, d'où l'on tirera x, attendu que la somme $x + y$, égale à quatre angles droits, moins le double de l'angle afb, est connue.

D'après cela, il est visible, premièrement, que les deux contours curvilignes égaux, $a'bb'a'a$ et $ab_1b'_1a'_1a$, pourront tourner autour de f et de f_1, en roulant sans glisser l'une sur l'autre, et se touchant continuellement sur la droite des centres ff_1; secondement, que le rapport des vitesses, d'abord égal à $\frac{af_1}{af}$, décroîtra graduellement jusqu'à $\frac{af}{af_1}$, puis restera constant pendant le parcours de l'angle y pour la première courbe et de l'angle x pour la seconde, après quoi il repassera graduellement à la valeur $\frac{af_1}{af}$, qu'il gardera jusqu'à la fin de la révolution complète.

Ceci n'est qu'un exemple des divers emplois, faciles à imaginer, qu'on peut faire des courbes déduites de l'ellipse.

IV. *Exemple du procédé graphique.* — L'une des lignes primitives est le contour d'un quarré dont les angles sont ar-

rondis (fig. 76). Ceci est un exemple du procédé graphique et général, indiqué à l'article III du numéro 125. Soit ABDEF... la ligne qui doit tourner autour de C, et qui se compose de huit parties égales à AB, et symétriques deux à deux. Proposons-nous de déterminer la seconde courbe, ayant la même propriété et la même longueur de périmètre, de manière que ces deux lignes primitives fassent en même temps une révolution entière partagée en huit parties d'égale durée.

Sur le prolongement de l'apothème CA cherchons le second centre de rotation C_1. Evidemment, ce point ne peut pas être pris arbitrairement pour satisfaire à la condition que les deux périmètres soient d'égale longueur. Pour une première approximation on le prendra en C', en faisant $AC' = CB$. On construira en conséquence (125) la courbe AM_1B_1 correspondante à la ligne mixte AMB, et l'on vérifiera si le point B_1 se trouve sur C'b faisant avec C'A un angle ACB, c'est-à-dire un angle de 45 degrés. S'il ne s'y trouve pas, ce qui dépendra de l'arrondissement plus ou moins prononcé qu'on aura adopté en B, on mènera par B_1 une parallèle à C'b qui rencontrera CA prolongé en un point C'' pour lequel on recommencera la construction précédente; et si le résultat donne encore une erreur, qui ne sera que très-petite, cette erreur même indiquera la correction à faire pour obtenir plus exactement le centre C_1 cherché. On achèvera ensuite la courbe $AB_1D_1E_1F_1...$, et à chaque quart de tour des deux roues en contact sans glissement, le rapport des vitesses angulaires variera de

$$\frac{AC}{AC_1} \text{ à } \frac{BC}{BC_1},$$

nombres qui, dans la figure 76, sont entre eux à peu près comme 16 est à 25.

On remarquera que le même procédé graphique et d'essais successifs s'appliquerait aux cas où la ligne donnée serait un triangle ou toute autre figure fermée, et à ceux où l'on voudrait

qu'à un tour de cette ligne correspondît un nombre entier $(2, 3, \ldots)$ de tours de la seconde, ou réciproquement. Si, par exemple, on voulait que, pendant un huitième de révolution de la figure $ABDE\ldots$, la courbe cherchée fît un quart de tour, il faudrait trouver le centre C_1 tellement placé que l'angle AC_1B_1 fût un angle droit.

V. *Secteurs circulaires successivement en contact.* — On peut remplacer les courbes continues que nous venons de considérer, par des arcs de cercles qui se succèdent, comme on le voit dans la figure 77. Autour du centre C sont disposés, par exemple, cinq secteurs dont les angles sont désignés par α, β, γ, δ, ε et valant ensemble quatre angles droits. Autour du centre C′ sont de même cinq secteurs dont les angles sont α', β', γ', δ', ε'. Les rayons de deux secteurs correspondants sont réciproques à leurs angles, soit α et α', soit β et β', ainsi de suite, et ont une somme constamment égale à la distance des centres CC′. Il en résulte que les arcs de cercles de deux secteurs correspondants sont de même longueur et peuvent rouler sans glissement l'un sur l'autre. Dans ce cas, le rapport des vitesses angulaires autour de C et C′, prend successivement les valeurs

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'}, \frac{\delta}{\delta'}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \frac{\alpha}{\alpha'}, \text{ etc.},$$

en passant brusquement de l'une à l'autre.

127. Engrenages substitués aux courbes primitives. — Lorsque nous avons défini les courbes primitives par la propriété de rouler l'une sur l'autre sans glissement, pendant le mouvement simultané des deux corps auxquels on les suppose adhérentes, nous n'avons pas dit que ces courbes étant prises pour sections droites de deux cylindres solides, ceux-ci pourraient, comme les cylindres circulaires, remplir la fonction de rouleaux de friction dont l'un quelconque peut conduire l'autre dans les deux sens possibles de sa rotation. Les courbes primitives non

circulaires ne jouissent pas de cette propriété, ce qui est mis en évidence par les quatre cas de la figure 78. Sur deux arbres cylindriques, pouvant tourner autour de leurs axes C et C', s'enroulent deux cordes attachées, d'ailleurs, l'une à un corps dont le poids est P, l'autre à un traîneau portant une charge Q. Aux deux arbres sont liés respectivement deux corps solides, appelés cames, qui se touchent suivant les profils AB et A'B' supposés deux courbes primitives conjuguées. Dans les deux cas indiqués par les figures 78_1 et 78_2, la communication de mouvement de l'un des corps à l'autre se réalisera, si le poids P est convenablement proportionné à la charge Q. Dans le premier, la came AB pousse à droite la came A'B'; dans le second, la came A'B' pousse l'autre à gauche; dans l'un et l'autre cas, le corps moteur, en descendant, tend la corde du traîneau et l'entraîne. Il n'en est pas ainsi dans les deux derniers cas : dans celui de la figure 78_3, la came AB, en tournant à gauche, se détache *sans glissement* de la came A'B', retenue immobile par la corde du traîneau; dans le cas de la figure 78_4, c'est la came A'B' qui se détache à droite de l'autre restant sans mouvement. On obvie à cette séparation des deux corps tournants au moyen d'engrenages.

Pour que deux roues dentées produisent par leur contact la même relation de mouvement que le contact de courbes primitives, il suffit que les profils des dents soient tracés suivant les principes des engrenages ordinaires. Si l'on se donne le profil d'une dent, celui de la dent correspondante sur l'autre roue est l'enveloppe des diverses positions que prend le profil donné pendant que la première courbe primitive roule sur la seconde; ou bien si l'on imagine qu'une courbe quelconque, un cercle par exemple, roule sur les deux courbes primitives en même temps que celles-ci roulent l'une sur l'autre, un point quelconque du cercle auxiliaire décrit, relativement aux deux courbes primitives, deux autres courbes qui conviennent au profil des dents; généralement, pour conserver la relation de

mouvement déterminée par deux courbes primitives, il faut et il suffit que la normale commune à deux dents en contact passe à chaque instant au point commun de ces deux courbes.

128. Roues de Roemer. — La figure 79 donne l'idée d'un système de roue proposé par le célèbre astronome danois Roemer (1644 à 1710) pour faire varier le rapport des vitesses angulaires de deux arbres. Les deux axes AA_1, BB_1, sont parallèles. Autour du premier tourne un tronc de cône armé dans toute sa hauteur de côtes saillantes analogues aux dents des roues d'engrenages coniques. Autour du second tourne un autre tronc de cône dont le sommet B_1 est opposé à celui du premier, et il est garni de chevilles qui successivement viennent se loger dans les cannelures de celui-ci. Soient r et R les rayons primitifs des bases supérieures, r_1 et R_1 ceux des bases inférieures.

Lorsque la cheville située dans la base supérieure engrène avec le cône cannelé, le rapport des vitesses angulaires autour de AA_1 et BB_1, est égal à $\frac{R}{r}$; lorsque c'est la cheville inférieure, ce rapport devient $\frac{R_1}{r_1}$; les chevilles intermédiaires établissent la transition de l'une à l'autre de ces valeurs, et doivent être disposées suivant une courbe qu'on trouvera par une construction graphique exécutée sur le développement des deux cônes primitifs.

Remarques. — Lorsque le mouvement du cône cannelé est uniforme, le mouvement du cône à chevilles est périodiquement uniforme, chaque période ayant la durée d'une révolution de cette dernière roue. Si le nombre des cannelures et celui des chevilles sont premiers entre eux, la même cannelure est successivement en contact avec les diverses chevilles de la seconde roue.

129. Roue dentée excentrique et long pignon, de Huygens. — La figure 80 représente une disposition applicable au cas où les deux axes de rotation concourent et sont à angle droit. La grande roue dentée tourne autour d'un axe qui ne passe pas par son centre. On comprend qu'il est difficile de donner à ce genre d'engrenage la précision d'un engrenage conique et qu'il ne convient qu'à un mouvement lent.

130. Engrenage intermittent. — A et A′ (fig. 81) sont les axes de rotation de deux roues, dont la seconde ne fait qu'une fraction, par exemple un dixième de tour pendant que la première fait un tour entier. Si cette condition était la seule à remplir, il suffirait de deux roues dentées ordinaires dont les nombres de dents seraient dans le rapport de 1 à 10, qui serait constamment l'inverse du rapport des vitesses angulaires. Mais, dans le système représenté par la figure 81, pendant que la roue A accomplit, suivant une loi de mouvement quelconque, les 9/10 de sa révolution, la roue A′ reste immobile, après quoi les deux roues tournent à la fois de 1/10 de tour. A cet effet, la première roue A ne porte qu'une dent et est circulaire autour du centre A, sauf le voisinage de cette dent, tandis que le profil de la deuxième roue A′ présente dix crans séparés par autant d'arcs de cercle concaves, dont le rayon est égal à celui de la roue A. On voit clairement que tant que la dent unique de A n'appuie pas sur l'un des côtés d'un cran de A′, cette seconde roue ne peut tourner ni à droite ni à gauche, parce que la convexité de la roue A s'oppose au passage sur la droite AA′ des pointes saillantes de la roue A′. Mais, lorsque la dent de A tournant, par exemple, dans le sens de la flèche, vient s'engager dans le cran qu'elle rencontre, le mouvement simultané dans ce même sens des deux roues devient possible moyennant les deux creux ménagés en avant et en arrière de la dent pour laisser passer les deux pointes de la roue A′; et le mouvement de celle-ci cesse dès que la dent abandonne le cran qu'elle a fait passer d'un côté à l'autre de la droite des centres de rotation.

Cette disposition est employée dans certains appareils dits *compteurs*.

Sur l'arbre de la roue A′ est calée une autre roue A_1, pareille à la première A qui engrène avec une roue A'_1, pareille à A′, dont l'arbre ne fait qu'un tour, tandis que celui de la roue A en fait 100; ainsi de suite.

BOUTON DE MANIVELLE, EXCENTRIQUES, CAMES ET TIGE GUIDÉE OU CORPS TOURNANT.

131. Manivelle ou excentrique circulaire et tige guidée à cadre. — Nous avons vu précédemment (104) le mode de liaison d'une tige dentée, dite crémaillère, armée de dents et engrenant avec une roue, qui, lorsqu'elle tourne uniformément, détermine dans la crémaillère une translation également uniforme. Mais il est souvent utile de faire correspondre à une rotation uniforme une translation variée, et l'un des cas de ce genre, qui se présente dans la pratique, est celui qu'indique la figure 82. Un cylindre, dont l'axe est projeté en O, est assujetti à tourner autour d'un autre axe qui, parallèle au premier, est projeté en C. Ce même cylindre est compris entre deux barres parallèles AA′ et BB′, qui d'une part sont liées entre elles en AB et A′B′, pour former une *coulisse* où il peut se mouvoir, soit qu'il touche les deux barres, chacune suivant une des génératrices, soit qu'il soit enveloppé de deux coussinets formant une sorte de boîte rectangulaire, qui elle-même glisse dans la coulisse suivant des faces planes. D'autre part la coulisse fait corps solide avec les deux parties EF et GH d'une tige assujettie par des guides à ne se mouvoir qu'en ligne droite, perpendiculairement aux axes C, O, et aux faces de la coulisse.

Lorsque, comme dans le cas de la figure 82, l'axe C se trouve hors du cercle O, le corps solide qui lie le cylindre O à un arbre tournant autour de l'axe C s'appelle une *manivelle*.

Une manivelle, dans sa plus grande simplicité, est une petite barre ordinairement en fer qui se fixe par un bout à l'extrémité

d'un arbre tournant, à peu près perpendiculairement à l'axe de rotation, en dehors de l'intervalle des appuis, et qui, à l'autre bout, est repliée parallèlement à l'arbre sous forme d'un manche cylindrique sur lequel on agit de la main pour faire tourner l'arbre. Le manche est souvent remplacé par un cylindre court appelé *bouton* ou *maneton* et embrassé par des coussinets, lesquels tantôt glissent dans une coulisse, comme on vient de le voir, tantôt sont fixés à l'extrémité d'une tige appelée *bielle* et destinée à agir sur la manivelle ou à recevoir son action.

Quelquefois la barre de la manivelle est très-convenablement remplacée par une roue entière qui, pouvant d'ailleurs avoir une autre fonction, comme roue d'engrenage ou autre, porte le bouton fixé dans l'un de ses bras, perpendiculaire à son plan de rotation.

Lorsque la manivelle doit faire une révolution entière et qu'elle est placée dans l'intervalle des appuis de l'arbre tournant, on emploie l'une des deux dispositions suivantes :

Tantôt le rayon du bouton est sensiblement plus petit que la distance de l'axe de rotation à celui du bouton ; l'arbre est alors *coudé*, et il peut y avoir un nombre illimité de telles manivelles sur un même arbre.

Tantôt le rayon du bouton excède la somme du bras CO de la manivelle et du rayon de l'arbre ; la forme de manivelle disparaît alors, quoique la fonction subsiste. Le bouton prend le nom d'*excentrique circulaire*, et, s'il est articulé à une bielle, celle-ci se termine par un anneau qui l'embrasse et s'appelle *bague d'excentrique*.

Si dans la figure 82, nous remplaçons le bouton par un excentrique, l'appareil prend l'aspect indiqué par la figure 83, où O est le centre de figure de l'excentrique et C son centre de rotation.

Dans les deux cas, le centre O reste toujours sur la *ligne moyenne* MM de la coulisse, et, pendant qu'il tourne autour du point C fixe, cette droite MM se meut comme la projection

rectangulaire du point O sur un diamètre de la circonférence qu'il décrit. Ainsi, par exemple, lorsque l'arbre et le point O tournent uniformément autour de C, un point quelconque de la ligne MN et par conséquent de la tige, a le mouvement oscillatoire cité comme exemple du mouvement varié aux numéros 16 et 19.

132. Excentrique triangulaire et tige guidée. — On appelle excentrique triangulaire un plateau cylindrique de peu d'épaisseur dont le profil ou la section droite ABC (fig. 84) se compose de trois arcs circulaires égaux ayant pour centres les trois sommets d'un triangle équilatéral, et pour rayon le côté. Chacun de ces arcs est donc 1/6 de circonférence. Cette pièce est fixée en saillie à l'extrémité d'un arbre tournant dont l'axe de rotation perpendiculaire au plan du triangle passe en l'un des sommets. Deux droites parallèles quelconques qui touchent cette figure sont toujours entre elles à une même distance égale au rayon des trois arcs. Cette distance est celle de deux côtés parallèles d'un cadre qui embrasse l'excentrique et qui est assujetti par des guides à ne se mouvoir qu'en ligne droite, perpendiculairement à ces deux côtés.

Soient MN et PQ ces deux côtés du cadre ; C est le centre de la rotation qui s'effectue dans le sens indiqué par la flèche.

Pendant que le sommet mobile le plus avancé se transporte de B en D, l'arc qui se déplace de CB en CD pousse de PQ en P'Q' le côté antérieur du cadre qui lui reste tangent, et par conséquent toujours à la même distance en avant du second sommet mobile qui se transporte de A en B. Dans le premier tiers de la demi-révolution le mouvement du cadre est donc celui de la projection sur AE du sommet A par lequel, d'ailleurs, passe continuellement pendant ce temps le côté situé d'abord en MN ; le cadre s'avance ainsi de la moitié du rayon AC, vers la droite.

Dans le second tiers de la demi-révolution le sommet le plus

avancé allant de **D** en **E** pousse le côté antérieur de **P'Q'** en **P''Q''**, en lui faisant décrire des espaces égaux à ceux que parcourt en même temps sa projection sur **AE**, pendant que le second côté du cadre reste tangent à l'arc de l'excentrique opposé à ce sommet.

Enfin, dans le troisième tiers de la demi-révolution, les deux sommets mobiles comprenant entre eux le point de tangence du côté du cadre parvenu en **P''Q''**, celui-ci reste immobile.

Pendant l'autre demi-révolution, les mêmes faits se reproduisent dans le même ordre, mais en sens inverse.

Dans les deux premiers tiers de chaque période, la vitesse du dre (16) est à celle d'un sommet mobile de l'excentrique mme l'ordonnée, par rapport au diamètre **AE**, du sommet parcourt soit l'arc **AB**, soit l'arc **DE**, est au rayon **AC**. croissante qu' elle était, elle devient brusquement décroisse, jusqu'à ce qu'elle soit et reste nulle. Il y a *temps d'arrêt* ant 1/6e de révolution de l'excentrique.

5. Généralités sur les excentriques menant un cadre parallèles. — **C** (fig. 85) étant l'axe de rotation e côté tangent supérieur du cadre, si l'on suppose la tio ns le sens de la flèche, pour savoir quel chemin au it le c e quand l'excentrique aura tourné de l'angle $\alpha = \text{'CM}$, ut mener la tangente **T'A'** perpendiculaire à **CM** et con er les distances **CA'** et **CA** dont la différence est le cherché. Si les tangentes opposées parallèles sont toujours à la même distance, le mouvement alternatif du cadre est formé de deux périodes égales et opposées. En effet, de $CA + CB = CA' + CB'$ il résulte $CB - CB' = CA' - CA$; donc à partir de l'instant où, l'excentrique ayant fait une demi-révolution, **CB** aura pris la direction primitive de **CA**, si un angle α est alors décrit, le cadre baissera autant qu'il aura monté pour le premier angle α.

Lorsque, outre cette condition de l'égalité de distance des

tangentes parallèles, l'excentrique est formé de deux moitiés symétriques, chaque période d'aller et de retour est aussi composée de deux moitiés symétriques, c'est-à-dire que la course entière du cadre étant *ab*, il met le même temps à parcourir les espaces égaux *am* et *nb*; car la première condition lui fait mettre le même temps à revenir de *b* en *n* qu'à aller de *a* en *m*; et d'après la symétrie, il met le même temps à aller de *n* en *b* qu'à revenir de *b* en *n*. L'excentrique circulaire et le triangulaire sont dans ce cas; pour l'excentrique triangulaire, les deux périodes commencent et finissent au milieu des temps d'arrêt.

Si les deux demi-oscillations ne sont pas égales en vitesse, le cadre ne peut pas toucher l'excentrique par ses deux bords, et l'on fait en sorte qu'il le presse continuellement dans le même sens, en vertu, soit de la pesanteur, soit d'un ressort.

134. Came et tige guidée. — Il arrive fréquemment qu'une tige, d'abord en repos, doit être mue en ligne droite dans un certain sens, en surmontant une certaine résistance, au moyen d'un arbre tournant, et ensuite ramenée, en un mouvement rapide et contraire, à sa première position par la libre action de la pesanteur ou d'un ressort, indépendamment de l'arbre qui continue de tourner toujours dans le même sens. Tel est un *pilon* qui est alternativement soulevé verticalement par une pièce saillante, dite *came*, implantée dans un arbre tournant horizontal, puis abandonné à l'effet de son propre poids qui le fait retomber. Tantôt, pour recevoir l'action de la came, le pilon est armé d'un corps saillant dit *mentonnet*, tantôt, ce qui vaut mieux, il présente à l'intérieur de sa figure prismatique une rainure ou entaille dans laquelle la came s'introduit tout le temps qu'elle agit sur le pilon.

Lorsque, supposé que l'arbre à cames tourne uniformément, on veut que pendant le contact de la came et de la tige guidée, celle-ci ait aussi sa vitesse constante, cette relation de

mouvement est précisément celle qui a lieu dans la crémaillère mue par une roue dentée, et la détermination de la figure de la came poussant un mentonnet plan suit la règle établie au numéro 104.

Si, au contraire, on veut varier la vitesse de la tige, en la faisant d'abord assez petite pour atténuer le choc initial, il suffit, en donnant au mentonnet ou à l'entaille de la tige le profil rectiligne, perpendiculaire à la direction du mouvement, de traiter la came comme une portion d'excentrique et d'appliquer les considérations du numéro précédent.

Soit, par exemple, **ABDE** (fig. 86) le profil d'une came tournant, ainsi que son arbre, dans le sens de la flèche avec la vitesse angulaire w autour de l'axe horizontal **C**, et pressant la face plane horizontale **AH**, qui appartient à la tige verticale. A cet instant initial du contact, la tige vient d'acquérir brusquement la vitesse linéaire $w \cdot \mathbf{AC}$. Si cette courbe **ABDE** était la développante **Aa** du cercle dont le rayon est **CA**, la tige continuerait à s'élever avec cette même vitesse, et le point de contact des deux profils serait continuellement sur la verticale passant en **A**. Mais le profil de la came a pour développée de **A** en **D** la courbe **AM**, qui s'éloigne du centre **C**, et de **D** en **E** la courbe **De**, qui se rapproche de ce même centre. Il en résulte que le mouvement de la tige est varié. Lorsqu'un point tel que **B** arrive au contact avec le mentonnet, la normale **Bb** devient verticale ; le rayon **Cb**, qui lui est perpendiculaire, est horizontal ; la tige s'est alors élevée de la longueur **Bb** transportée en $\mathbf{B_1b_1}$; sa vitesse est à cet instant égale à $w \cdot \mathbf{Cb}$, et l'arc parcouru, proportionnellement au temps, par le point **A** de la came est égal à $\mathbf{b'A}$. De même, lorsque le contact a lieu au point **D** de la came, la normale **Dd** devient verticale ; le rayon **Cd** devient horizontal ; la tige est à la hauteur **Dd** au-dessus de sa position initiale, de sorte que le point **D** de contact est parvenu en $\mathbf{D_1}$, et le mentonnet est en $\mathbf{A_2D_1}$; sa vitesse est alors $w \cdot \mathbf{Cd}$, et l'arc parcouru par le

point **A** de la came est **Ad'**. A partir de cet instant, la vitesse de la tige diminue, parce que depuis **D** jusqu'à **E** la normale se rapproche de l'axe **C**. Lorsque, enfin, le contact a lieu au point **E** de la came, la normale **Ee** est verticale, le rayon **Ce** vertical, de sorte que les deux points primitivement en **A** sur le mentonnet et en **E** sur la came, se trouvent confondus en A_2. La vitesse du mentonnet redevient $w \cdot Ce = w \cdot CA$, l'espace qu'il a parcouru est égal à **Ee**, tandis que l'origine **A** de la came ne s'est déplacée que de l'arc **Ae**. Immédiatement après, la came *échappe*, et le mentonnet et sa tige sont libres de retomber.

Cet exemple suffit pour faire comprendre comment, à l'aide de quelques essais, on trouverait le profil convenable pour la came qui devrait satisfaire à des circonstances données d'élévation et de temps. La figure 85 n'indique qu'une seule came, mais on en place ordinairement sur le même arbre plusieurs qui soulèvent successivement la même tige.

135. Excentriques ou cames à ondes menant une tige guidée à roulettes (fig. 87). — Les considérations du numéro 142 s'appliquent à ce mécanisme en substituant aux distances entre l'axe de rotation et les tangentes, les rayons vecteurs partant de cet axe et aboutissant à une courbe qui serait décrite par le centre d'un galet circulant sur celle de l'excentrique. Ainsi, lorsque deux galets touchent constamment (la somme des deux rayons vecteurs opposés étant constante), les deux demi-oscillations, l'une allant, l'autre revenant, suivent la même loi pour les espaces et le temps. Lorsque, en outre, l'excentrique est formé de deux parties symétriques, une symétrie analogue a lieu dans chaque demi-oscillation.

Ce qui distingue ce mode de communication, c'est que la courbe de l'excentrique peut avoir des parties concaves.

Came en cœur (fig. 88). — La courbe est une spirale d'Archimède; la translation de la tige guidée est uniforme et alternative en même temps que la rotation de la came.

Si le mouvement de la tige ne se compose pas de deux demi-oscillations égales, on n'emploie qu'un galet (fig. 89) ou bouton circulant dans une coulisse fixée à l'arbre tournant.

En général, les temps d'arrêt plus ou moins longs répondent aux parties circulaires de l'excentrique ayant leur centre dans l'axe de rotation.

L'inconvénient grave des excentriques, c'est le frottement souvent considérable des deux pièces dont l'une conduit l'autre.

136. Bouton, excentrique ou came en contact avec un autre corps tournant. — Deux corps tournants ou oscillants autour de deux axes fixes peuvent être en communication au moyen d'un bouton de manivelle glissant dans une coulisse, ou par l'emploi d'un excentrique ou d'une came qui, fixée sur l'un des deux corps, agit sur une surface adhérente à l'autre. On verra dans la seconde section plusieurs exemples de cette liaison dont la théorie, d'après les explications qui précèdent, n'offre aucune difficulté.

§ 5.

LIAISON DE DEUX CORPS SOLIDES TOURNANTS PAR L'INTERMÉDIAIRE D'UN TROISIÈME CORPS SOLIDE OU FLEXIBLE.

1° DEUX SOLIDES TOURNANTS LIÉS PAR UNE BIELLE.

137. Propriété générale de cette liaison. — Chacun des corps extrêmes est assujetti, soit à tourner autour d'un axe fixe, soit à se mouvoir en translation rectiligne (cas particulier de la rotation) ; une bielle ou barre rigide est articulée en deux de ses points avec deux points invariables des corps extrêmes. Chaque articulation, analogue à l'*assemblage à rotule* d'un pied de graphomètre, permet à la bielle de tourner en tous sens,

relativement à l'un des corps extrêmes autour d'un de ses points, dit *centre de l'articulation.*

Les vitesses des deux centres d'articulation, situées sur une même bielle, ont à chaque instant la relation remarquable qui a été démontrée au numéro 37. Ainsi, *les projections rectangulaires des vitesses de deux centres d'articulation, sur la direction actuelle de la droite qui joint ces deux points, sont égales et de même sens.*

Dans le cas particulier, le plus fréquent dans la pratique, où les axes de rotation sont parallèles et les centres d'articulation dans un plan perpendiculaire à ces axes, on sait (55) quelle est, dans chaque position donnée du système, la relation simple entre les vitesses angulaires des deux corps tournants, ou (56) entre la vitesse angulaire de l'un et la vitesse linéaire de l'autre, si celui-ci est en translation.

138. Balancier à bride. — Le cas d'une bielle qui oscille dans un plan mérite une étude spéciale, à cause de ses applications dans beaucoup de machines à vapeur. Un corps solide appelé *balancier*, analogue au fléau d'une balance et représenté simplement par la droite **OA** (fig. 90), oscille autour d'un axe fixe projeté en **O**, et que nous supposerons horizontal. **C** est un second axe fixe parallèle au premier, et sur lequel oscille un second système solide **CB** appelé *contre-balancier* ou *bride*, formé de deux pièces qui laissent entre elles un intervalle, comme les deux rênes d'une bride de cheval, et qui sont symétriques par rapport au plan milieu du balancier pris ici pour plan de la figure. **AB** est un autre système de deux pièces symétriques, formant un *lien* articulé à charnière d'une part suivant la droite projetée en **A**, sur le balancier **AO**, et d'une autre part suivant la droite projetée en **B**, sur les deux parties de la bride; les deux pièces du lien laissent entre elles un intervalle moindre que celui des deux pièces de la bride, de sorte que celles-ci embrassent le lien de même que les deux pièces du lien em-

brassent le balancier **OA**. Enfin, en **M** vers le milieu de la distance **AB** et entre les deux pièces du lien est articulée la tête d'une tige qu'il s'agit de faire mouvoir à très-peu près en ligne droite. Dans la figure 91, le balancier **OA**, la bielle **BC** et le lien **AB** sont supposés développés parallèlement à un plan. Sauf les détails de construction dont nous n'avons pas à nous occuper ici, les figures suffisent pour faire voir que le mouvement de la tête de la tige revient à celui d'un point **M** pris sur une droite **AB** de longueur constante dont les deux points **A** et **B** sont assujettis à se mouvoir sur deux circonférences décrites dans un même plan, autour de deux centres fixes, **O** et **C**.

La courbe complète qui serait décrite par le point **M**, si on supposait à la droite **AB** toutes les positions possibles, a sa forme analogue à celle du chiffre 8 dont le point multiple est sur la ligne des centres **OC**, et chacun des deux arcs qui s'y croisent diffère peu d'une ligne droite aux environs de ce point. C'est un de ces arcs que parcourt le point **M**, tandis que le point **A** du balancier oscille entre deux positions extrêmes.

Le centre **O** étant connu, ainsi que la longueur **OA** du balancier et les deux parties **AM** et **MB** de la longueur du lien **AB**, on pourrait se donner trois positions possibles et d'ailleurs quelconques M_0, M_1 et M_2, du point mobile **M**, en ligne droite ou autrement, et déterminer le centre **C** et le rayon **CB** de la bride, de manière à faire effectivement passer le point **M** par ces trois positions ; car ces données suffiraient pour trouver très-facilement les trois points A_0, A_1 et A_2 correspondants de l'arc circulaire A_0A_2, puis les points B_0, B_1 et B_2, et, par suite, le centre **C**.

139. Règles pratiques applicables aux balanciers des machines à vapeur. — Watt a utilisé les propriétés dont nous venons de parler, pour guider presque exactement en ligne droite l'extrémité supérieure de la tige d'un piston de machine

à vapeur. Pour énoncer les règles qu'il a adoptées, désignons par A_0 et A_2 (fig. 92) les deux points extrêmes, et par A_1 le milieu de l'arc circulaire décrit par l'articulation A du balancier et du lien. Nous exagérons cet arc comparativement au rayon, afin d'éviter, dans le reste de la figure, la confusion de certains points qui, en réalité, sont fort rapprochés. A ces trois points A_0, A_1 et A_2 correspondent trois points M_0, M_1 et M_2 de la courbe décrite par le point M du lien. Cela posé, les *quatre* règles suivies par Watt sont les suivantes :

Première règle. — *Les trois points* M_0, M_1 et M_2 *sont pris sur la droite passant au milieu* D *de la flèche* A_1P, *et perpendiculaire à cette flèche.*

De là deux conséquences qui deviennent évidentes, si l'on trace la droite M_1P : *la droite* M_0M_2 *est égale à la corde* A_0A_2, *et le point* M_1 *est son milieu.*

Deuxième règle. — *Le point mobile* M *est placé au milieu du lien* AB.

Il en résulte que, les points B_0, B_1 et B_2 désignant les trois positions de l'articulation du lien et de la bride, premièrement, *les deux extrêmes* B_0 et B_2 *sont sur la droite menée par* A_1, *parallèlement à la corde* A_0A_2, *et leur distance* B_0B_2 *est égale à cette corde ;* secondement, *le point intermédiaire* B_1 *est sur la même corde prolongée au besoin, et sur la droite* QB_1 *menée perpendiculairement à* B_0B_2 *par son milieu* Q. D'où il suit que le triangle isocèle $B_0B_1B_2$ est égal au triangle $A_0A_1A_2$; *l'arc circulaire* $B_0B_1B_2$ a donc son centre C sur B_1Q prolongée, et a son rayon égal à OA ; de sorte que, *si l'on projette en* H, *le centre* C *sur* OA *prolongée, le point* D, *milieu de la flèche, est aussi le milieu de* OH.

D'ailleurs, la distance CH égale à B_1P est l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est la longueur A_1B_1 du lien, et le troisième côté la flèche A_1P. C'est ce que nous exprimerons par la formule :

$$h = \sqrt{l^2 - f^2}.$$

Une autre conséquence des deux premières règles de Watt, c'est que, comme la figure 92 le montre clairement, la courbe $M_0M_1M_2$ a son point milieu M_1 sur la droite des centres CO, point qui est un centre de la courbe, composée, entre M_0 et M_2, de deux moitiés égales, situées, l'une du côté droit, l'autre du côté gauche de l'axe rectiligne M_0M_2. D'ailleurs, cette courbe a sa tangente en M_1 dirigée suivant ce même axe, parce que, à l'instant où le point décrivant est en M_1, les articulations A et B sont en A_1 et B_1, d'où il suit que le centre instantané de rotation du lien, qui, en général, est à la rencontre des rayons OA et CB, se trouve dans ce cas à l'infini sur une perpendiculaire à M_0M_1; en d'autres termes, tous les points du lien, à cet instant, se meuvent parallèlement à cet axe. Donc la courbe, passant tangentiellement de gauche à droite de M_0M_2, a une inflexion en M_1; et, comme elle passe aussi en M_0 et en M_2, elle a deux autres inflexions, l'une entre M_1 et M_0, l'autre entre M_1 et M_2. La figure 93 représente, en l'exagérant transversalement, la forme de cette courbe.

Troisième règle. — La distance OH, *double de la distance* OD *de chaque centre de rotation,* O *ou* C, *à la droite* M_0M_2 *prolongée, est faite égale au triple de la corde* A_0A_2 *ou des droites* M_0M_2 *et* B_0B_2

De là des relations également simples de la flèche A_1P et du rayon AO avec la corde A_0A_2.

Posons

$$A_0A_2 = c, \qquad A_1P = f,$$
$$OA = R, \quad OH = 2\,OD = a,$$

La troisième règle de Watt s'exprime par

$$a = 3c$$

ou

$$2\left(R - \frac{f}{2}\right) = 3c.$$

Exemple conforme aux règles de Watt. — Les rayons R et r étant égaux, prenons leur longueur pour unité. Choisissons l'axe Ox suivant la position moyenne OA_1 du balancier. Faisons (2e règle) $n=\frac{1}{2}$ et (4e règle) $l=c$; par conséquent (3e règle) $l=\frac{24}{37}$, $nl=\frac{12}{37}$ et $a=\frac{72}{37}$. Enfin (2e et 3e règles)

$$h=\sqrt{l^2-f^2}=\frac{1}{37}\sqrt{(24^2)-4}=\frac{2}{37}\sqrt{143}.$$

En attribuant à α diverses valeurs entre *zéro* et 18° 55′ 28″ (3e règle), on trouvera les valeurs correspondantes de x et de y. En comparant chaque valeur de x à la distance OD égale à $\frac{a}{2}=0{,}972\,973$, on aura en une fraction très-petite du rayon la distance du point cherché de la courbe à la droite M_0M_2; et la différence $\frac{1}{2}h-y$ sera la distance du même point à la droite perpendiculaire à M_0M_2, menée par le point central M_1.

C'est ainsi qu'ont été obtenus les résultats consignés dans le tableau suivant :

ANGLE. α	ÉCARTEMENT $\frac{a}{2}-x$	DISTANCE $\frac{h}{2}-y$	ANGLE. α	ÉCARTEMENT $\frac{a}{2}-x$	DISTANCE $\frac{h}{2}-y$
0°	0,000 000	0,000 0	14°	0,000 278	0,240 8
5°	0,000 025	0,086 9	14°30′	0,000 282	0,249 3
10°	0,000 158	0,172 7	15	0,000 281	0,257 8
11°	0,000 194	0,189 8	16	0,000 265	0,274 7
12°	0,000 228	0,206 8	17	0,000 217	0,291 7
13°	0,000 258	0,223 8	18	0,000 128	0,308 6
13°30′	0,000 268	0,232 3	18°55′28″	0,000 000	0,323 2

Ces nombres, qui permettent de construire la courbe de la

figure 93, où les déviations horizontales sont amplifiées au centuple, comparativement aux distances verticales, montrent que le maximum d'écartement est, à un millionième près, égal à la fraction 0,000282 du rayon **OA**, et qu'il a lieu à peu près aux 3/4 de la distance du point central $\mathbf{M}_0$ au point extrême $\mathbf{M}_1$.

Remarques. — Quelque petite que soit la déviation de la courbe qui vient d'être étudiée, on pourrait la réduire encore. Rien n'empêcherait, en conservant les deux premières règles de Watt, de s'écarter de la troisième et de diminuer le rapport de la distance $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_2$ aux rayons **OA** et **CB**, rapport qui semble n'avoir été préféré par Watt qu'à cause de l'avantage qu'il offre, quand la course $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_1$ est donnée, d'exprimer très-simplement la distance **OH** qui en est le triple, et la flèche f qui en est le douzième, et, par conséquent, contient autant de *pouces* et de *lignes* que la course contient de *pieds* et de *pouces*.

Du reste, en diminuant l'intervalle des deux points extrêmes $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_2$ en ligne droite avec le point milieu $\mathbf{M}_1$, on pourrait conserver la longueur de la course égale aux 24/37 du rayon **R**, d'où il résulterait que la courbe se prolongerait un peu en dessus et en dessous des points $\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{M}_2$, mais en s'écartant moins que la courbe de Watt de l'axe rectiligne passant par $\mathbf{M}_1$.

141 (*). **Propriété du pantographe, lemme applicable au numéro suivant.** — **abBA** (fig. 95) *étant un parallélogramme articulé en ses quatre sommets, de sorte que les angles peuvent varier simultanément; si, sur trois côtés consécutifs* **ab**, **aA**, **AB**, *prolongés selon le besoin, on prend trois points* **m**, **M**, **O**, *en ligne*.

(*) Bien que les numéros 141 et 142 traitent de cas qui ne sont pas compris sous le titre du paragraphe 5, puisqu'ils considèrent, l'un, une liaison de quatre corps, et l'autre, une liaison de cinq corps mobiles, néanmoins les propriétés qu'ils démontrent se rattachent si étroitement à l'emploi du simple balancier à bride, qu'il paraît convenable de ne pas les séparer des articles précédents.

droite, et d'ailleurs quelconques; et qu'on fasse mouvoir cette figure plane, en maintenant fixe l'un de ses points, **O**, *par exemple, et en assujettissant un des deux autres points à décrire une certaine courbe, telle que* **MM'**; *le troisième point* **m** *décrit une seconde courbe* **mm'** *semblable à la première, et semblablement placée relativement au point* **O**, *pôle commun de similitude.*

En effet, de ce que les points **m**, **M**, **O**, sont en ligne droite, il s'ensuit que les points **m'**, **M**, **O**, satisfont à la même condition, puisque de même que $\frac{am}{AM} = \frac{aO}{AO}$ on a $\frac{a'm'}{A'M'} = \frac{a'O}{A'O}$; par conséquent, le rapport des distances variables **Om'** et **OM'** reste constant, étant égal à $\frac{Oa'}{OA'}$ ou $\frac{Oa}{OA}$.

Un pantographe est formé de quatre règles **aO**, **ab**, **AB**, **bB** articulées aux quatre sommets **a**, **b**, **B**, **A** d'un parallélogramme. On assujettit l'une des règles à tourner autour d'un axe immobile **O**; on fixe en **m** et **M** en ligne droite avec **O**, deux pointes, l'une sèche, l'autre traçante; on promène la pointe sèche sur une ligne donnée, située dans un plan perpendiculaire aux axes d'articulation et de rotation ; l'autre pointe trace dans le même plan une figure semblable; le rapport de similitude est celui de **OA** à **Oa**.

142. Parallélogramme articulé de Watt.—Si **OAa** (fig. 96) est un balancier, **CB** une bride assujettissant le point **M** du lien **AB** à décrire une courbe presque droite, en achevant le parallélogramme articulé **AabB**, on obtient en **m**, à la rencontre de **ab** et du prolongement de la droite **OM**, un point qui décrira une courbe semblable à la première, presque droite, mais plus grande dans le rapport de **Oa** à **OA**. Les deux points **M** et **m** serviront donc à guider deux tiges parallèles. Tel est, en effet, l'usage de cette disposition dans certaines machines à vapeur.

Pour faire connaître les règles pratiquées par Watt, inventeur

de cet appareil, il suffit d'ajouter à celles du numéro 138, qu'on fait ordinairement $OA = Aa$ en même temps que $AM = MB$. Il en résulte :

1° Que le point m, se confondant avec b, est un sommet du parallélogramme ;

2° Que la courbe $m_0m_1m_2$ à longue inflexion qu'il décrit est double de celle $M_0M_1M_2$ que parcourt le point M, et est à une distance double, de l'axe de rotation O ;

3° Que, par conséquent, la droite m_0m_2 passe par l'axe de rotation C ; et, comme le point M_1 est sur la droite CO (138 1°), il s'ensuit que m_1 position moyenne de m, y est aussi et conséquemment en C ;

4° Que la course m_0m_2 double de M_0M_2 ou de A_0A_2 est égale aux $\frac{2}{3}$ de la distance du centre O à la droite m_0m_2 ;

5° Que le rayon Oa du balancier est égal à cette course multipliée par $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{24}\right)$;

6° Que la flèche de l'arc $a_0a_1a_2$ décrit par l'articulation a est $\frac{1}{12}$ de cette même course a_0a_2 ou m_0m_2.

143. Joint brisé ou universel. — Ce mécanisme (fig. 97), qu'on appelle aussi *joint de Cardan* et *joint de Hooke*, établit une communication de mouvement entre deux arbres tournants I et K dont les axes fixes concourent en O. Ces deux corps sont liés entre eux par un troisième corps MNmn, dit *croisillon*, portant quatre tourillons, dont deux, M et m, ayant un même axe qui passe par O, tournent sans glisser longitudinalement dans des ouvertures pratiquées aux extrémités de deux branches adhérentes au premier corps, et les deux autres, N et n, dont l'axe commun passe également par le point O et est perpendiculaire à l'axe Mm, tournent sans glisser longitudinalement dans deux ouvertures ménagées aux bouts de deux branches faisant partie du second corps.

Proposons-nous de trouver *la relation des déplacements angulaires simultanés des deux arbres* à partir d'une position déterminée, par exemple celle où l'axe **Mm** est perpendiculaire au plan fixe **IOK**, tandis que l'axe **Nn** est dans ce plan.

Supposons que le premier arbre tourne autour de **OI** d'un angle α (en avant du plan **IOM**) ; le rayon **OM** vient en **OM'**, l'angle **MOM'** est égal à α et son plan est perpendiculaire à l'axe **OI**. En même temps, le rayon **ON** est venu en **ON'**, en décrivant un angle **NON'** que nous désignerons par β, et dont le plan perpendiculaire à **OK** contient par conséquent la droite **OM**, de sorte que l'angle **MON'** est égal à $\frac{\pi}{2}+\beta$; de plus, l'invariabilité du croisillon fait que l'angle **M'ON'** est droit. Ainsi les trois faces ou angles plans de l'angle trièdre formé des droites **OM**, **OM'** et **ON'** sont α, $\frac{\pi}{2}+\beta$ et $\frac{\pi}{2}$. Enfin, l'angle dièdre **M'OMN'**, compris entre deux plans respectivement perpendiculaires aux axes **OI** et **OK**, a pour mesure l'angle aigu **PON**, que nous désignerons par A, et qui est supplément de l'angle obtus **IOK** de ces deux axes. Cela posé, il ne reste plus qu'à appliquer la formule connue de trigonométrie sphérique, qui établit la relation entre les trois angles plans **a**, **b**, **c** d'un angle dièdre et de l'angle dièdre A opposé à la face **a**, savoir :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

en faisant $a=\frac{\pi}{2}$, $b=\alpha$ et $c=\beta+\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$0 = -\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \cos A,$$

d'où la relation cherchée :

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha \cos A.$$

Les angles β et α sont donc en même temps nuls et en même temps droits, mais inégaux dans l'intervalle. La transmission de mouvement serait impossible si l'angle A était droit, et qu'il en fût par conséquent de même de l'angle des deux axes.

144. Relation des vitesses angulaires des arbres liés par le joint brisé. — La différentiation de l'équation précédente donne, en appelant w la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ du premier arbre.

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{w\cos A\,(1+\tan g^2\alpha)}{1+\tan g^2\beta}=\frac{w\cos A\,(1+\tan g^2\alpha)}{1+\tan g^2\alpha\cos^2 A}$$

$$=\frac{w\cos A}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2 A}=\frac{w\cos A}{1-\sin^2 A\sin^2\alpha}$$

Ainsi, lorsque w est constant, $\frac{d\beta}{dt}$ est variable, et croît avec α, depuis la valeur $w\cos A$ qui correspond à $\alpha=0$, jusqu'à $\frac{w}{\cos A}$ qui répond à $\alpha=90°$. Les deux vitesses angulaires sont égales, quand α prend la valeur déterminée par l'équation

$$(1+\tan g^2\alpha)\cos A=1+\tan g^2\alpha\cos^2 A,$$

d'où

$$\tan g^2\alpha=\frac{1}{\cos A}$$

145. Joint d'Oldham. — C'est une communication de mouvement par un croisillon entre deux arbres tournants voisins et parallèles O_1 et O_2 (fig. 98). La différence entre cet appareil et le précédent consiste : 1° en ce que les axes des deux arbres tournants sont parallèles et à une certaine distance l'un de

l'autre; 2° en ce que les tourillons du croisillon glissent en long dans les ouvertures des branches où ils sont introduits.

Il est aisé de voir que les déplacements angulaires simultanés des deux arbres sont égaux, et qu'il en est par conséquent de même de leurs vitesses angulaires à un même instant. Soient O_1 et O_2 les deux axes de rotation des arbres, projetés rectangulairement sur le plan de la figure 99. Soient, dans ce même plan, AB et CD les deux axes du croisillon, à l'instant où l'un d'eux AB est dans le plan des deux axes fixes de rotation, et l'autre CD est perpendiculaire à ce plan. Supposons qu'à partir de cette situation le premier arbre tourne d'un certain angle; AB vient alors en A'B' passant toujours par O_1, tandis que CD vient en C'D' passant en O_2. Or, l'angle de A'B' avec C'D' étant égal à celui de AB avec CD, et ces angles étant dans un même plan, il s'ensuit que les angles BO_1B' et DO_2D' sont égaux. Les deux rotations autour des axes parallèles O_1, O_2, sont donc égales.

3° DEUX CORPS TOURNANTS LIÉS PAR UN CORPS FLEXIBLE (*) (CORDE, COURROIE, OU CHAINE).

146. Propriété générale des poulies. — Les *poulies* et les *tambours* sur lesquels s'enroulent et se meuvent sans glisser des cordes, courroies ou chaînes inextensibles, offrent des exemples bien connus de ce genre de liaison. Leur emploi se rattache à une propriété générale à laquelle nous allons être conduit.

Soient deux corps solides pouvant tourner autour des axes fixes parallèles C et O (fig. 100), et terminés par des surfaces dont les sections faites par le plan de la figure, perpendiculaire aux axes, comprennent les courbes BAD et NMP. Une corde BAMP est tangente de A en M aux deux courbes; elle est en-

(*) La liaison de deux corps solides par un liquide sera indiquée par un exemple dans la deuxième section.

roulée de B en A sur la première et de M en P sur la seconde. On suppose que, le premier corps subissant un très-petit déplacement angulaire, la courbe BAD se transporte en B'A'D'; et que la corde, ne pouvant pas glisser, entraîne par conséquent le second corps dont la courbe NMP vient se mettre en N'M'P'. Alors la corde est tangente suivant E'Q' et sa longueur B'E'Q'P' est restée égale à ce qu'elle était en BAMP. De là une relation nécessaire entre les déplacements angulaires de deux corps. On conçoit aisément que si ces déplacements sont infiniment petits, ils ont entre eux le même rapport que si la corde était remplacée par une bielle articulée en A et en M, que par conséquent les vitesses angulaires ω et ω' des deux corps sont réciproques aux distances des centres C et O à la direction actuelle de la tangente AM. On confirme rigoureusement cet aperçu en remarquant que, dans la seconde position du système, la distance du point A' à la tangente E'Q' prolongée est un infiniment petit par rapport à A'E', que de même, dans la première position, le point Q, qui doit ensuite venir en Q', est à une distance infiniment petite du second ordre de la droite AM prolongée; d'où il suit que les distances AQ, A'Q égales peuvent être considérées comme rectilignes, ce qui établit l'analogie de ce mode de liaison avec celui qui a été rappelé au numéro 136. Si la tangente AM rencontrait la droite CO dans l'intervalle des deux axes, les rotations seraient de sens opposés, tandis que, dans le cas contraire, qui est celui de la figure, les deux rotations sont de même sens.

147. **Poulies ordinaires.** — Lorsque, comme dans les poulies et tambours ordinaires, les courbes sont des circonférences de cercles, ayant leurs centres sur les axes de rotation, les vitesses de ces circonférences sont égales, et les vitesses angulaires sont réciproques aux rayons.

148. **Déplacements simultanés de deux poulies dont l'une est excentrique.** — Les poulies dont les sections par un

plan perpendiculaire à leur axe de rotation ne sont pas des cercles ayant leurs centres sur cet axe, sont dites poulies *excentriques*. Deux poulies, dont l'une est excentrique, établissent entre les deux arbres, à axes parallèles, sur lesquels elles sont calées, une communication telle, que si l'un a un mouvement uniforme, l'autre, au contraire, a un mouvement varié.

On peut se proposer et résoudre la question suivante : *Connaissant les deux courbes de deux poulies sur lesquelles la corde est enroulée, l'une de ces courbes dont une portion est* **BAD** (fig. 101), *étant quelconque et tournant autour du point fixe* **C**, *tandis que l'autre est une circonférence* **NMP** *tournant autour de son centre* **O**, *trouver la relation qui existe entre deux déplacements angulaires simultanés quelconques des deux poulies.*

A l'instant où la première courbe avait la position indiquée par la figure, la portion de corde qui allait d'une poulie à l'autre était tendue suivant la tangente **AM**. Après un certain temps, la courbe **BAD** est venue en **B'A'D'** et la corde est tangente aux deux courbes suivant **E'Q**. Le déplacement angulaire de la première poulie est l'angle au centre de l'un des arcs semblables **AA'**, **BB'**, **DD'**. Pour trouver celui de la seconde poulie, on remarquera qu'une partie de la corde, qui s'étendait de **A** vers **M**, est maintenant enroulée de **A'** en **E'** ; de sorte que, pour savoir quelle est sur **E'Q** la position **m'** du point de la corde qui était d'abord en **M**, il suffit de faire la distance rectiligne **E'm'** égale à la droite **AM** diminuée de l'arc **A'E'** rectifié ; or, pour que ce point de la corde soit venu de **M** en **m'**, il faut que la longueur de la corde **m'M** ait passé par le point géométrique **M** ; et comme elle n'a pas glissé sur la circonférence **NMP**, le point **M** de celle-ci a parcouru un arc **MM'** égal à la longueur **m'QM**, c'est-à-dire qu'on obtient le point **M'** en faisant l'arc **QM'** rectifié égal à **Qm'**. Enfin, le déplacement angulaire cherché de la deuxième poulie est l'angle au centre de l'arc **MM'** ainsi déterminé.

Maintenant, remarquons qu'il n'est pas nécessaire de con-

struire la courbe B'A'D'. En effet, supposons que la figure CB'A'E'QM'O tourne en sens contraire de la rotation effective autour de C, de manière à ramener B'A'D' en BAD, le centre O vient au point O_1 déterminé par la condition que l'angle OCO_1 soit égal au déplacement angulaire ACA', mais décrit en sens contraire ; la circonférence NMP vient en $N_1M_1P_1$, la tangente E'Q en EQ'. On obtient ainsi la longueur AEQ_1M_1 et par conséquent son égale A'E'QM, ce qui suffit pour trouver le point M' ; car on a :

$$MM' = A'E'QM - A'E'm' = AEQ_1M_1 - AM.$$

4° DEUX CORPS TOURNANTS LIÉS PAR UN TROISIÈME EN MOUVEMENT ÉPICYCLOÏDAL.

149. Mouvement épicycloïdal plan. — Autour d'un axe géométrique fixe MN que nous supposerons vertical (fig. 102) tourne un solide qui peut être une roue dentée ou poulie, mais qui peut se réduire à une simple barre A. Ce corps entraîne dans son mouvement un boulon ou arbre cylindrique vertical PQ, sur lequel tournent deux pignons b et c formant un seul corps solide. Ces deux pignons engrènent respectivement avec deux roues dentées B et C, qui ont leurs centres sur MN, et dont l'une, C par exemple, est immobile dans l'espace, tandis que l'arbre qui la traverse tourne. Des deux corps A et B, l'un, B par exemple, est invariablement fixé sur l'arbre dont MN est l'axe géométrique, tandis que la barre A tourne librement sur cet arbre. Ainsi les deux corps tournants A et B sont liés entre eux par l'intermédiaire du système solide et mobile des deux pignons b et c : il s'agit de trouver le rapport de leurs vitesses angulaires que nous désignerons par w_A et w_B et dont le sens positif est celui qu'indiquent les flèches.

A cet effet, prenons pour inconnue auxiliaire la vitesse angulaire du système des pignons b et c *relativement* à la barre A qui entraîne leur axe PQ. Cette vitesse, que nous désignons par W,

est celle que constaterait, comme une rotation absolue, un observateur qui serait entraîné à son insu dans le mouvement de la barre A. Désignons, d'ailleurs, par B, b, C et c, les rayons des quatre roues dentées B, b, C et c.

Cela posé, remarquons qu'au contact des roues b et B, le point T, considéré comme appartenant à la roue b, a sa vitesse linéaire absolue exprimée par la résultante, qui est ici une somme algébrique de sa vitesse d'entraînement $w_A \cdot B$ et de sa vitesse relative $-W \cdot b$, tandis que le même point T, considéré comme étant sur la roue B, a sa vitesse linéaire absolue égale à $w_B \cdot B$. De même, au contact des deux roues c et C, le point S appartenant à la roue c, a sa vitesse linéaire absolue égale à $w_A \cdot C = W \cdot c$, tandis que ce point, appartenant à la roue C, est immobile. On a donc les deux équations

$$\left.\begin{aligned} w_A \cdot B &= W \cdot b = w_B \cdot B, \\ w_A \cdot C &= W \cdot c = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \text{d'où} \quad & w_A \left(\frac{B}{b} - \frac{C}{c}\right) = w_B \frac{B}{b}, \\ \text{ou} \quad & w_A \left(1 - \frac{b}{B}\cdot\frac{C}{c}\right) = w_B. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Remarques. — Selon que $\frac{B}{b}$ est plus grand ou plus petit que $\frac{C}{c}$, les deux rotations w_A et w_B du bras A et de la roue B sont du même sens, comme nous l'avons supposé dans l'établissement de la formule, ou de sens contraires. Si les deux rapports $\frac{B}{b}$ et $\frac{C}{c}$ étaient égaux, w_B serait nulle; la roue B serait en repos comme la roue C. Sans multiplier excessivement les nombres de dents des quatre roues on peut faire que le rapport des deux rotations soit très-petit. Exemple : si l'on fait

$$\frac{b}{B} = \frac{18}{19} \quad \text{et} \quad \frac{c}{C} = \frac{39}{37},$$

en adoptant pour les quatre roues *b*, B, C et *c* les nombres de dents 18, 19, 39 et 37, on trouve

$$w_B = \left(1 - \frac{702}{703}\right) w_A = \frac{1}{703} w_1 .$$

C'est à cause de cette propriété que le mécanisme dont il s'agit s'appelle *engrenage différentiel.*

L'une des roues B et C, ou toutes les deux pourraient être à engrenage intérieur. Ainsi, par exemple, le rayon primitif de la roue immobile C peut s'étendre depuis l'axe MN jusqu'à S' où serait le contact de cette roue et du pignon c. En répétant dans cette hypothèse le raisonnement précédent, on verra que les équations obtenues tout à l'heure s'appliquent, avec cette seule différence que le rapport $\frac{C}{c}$ change de signe, de sorte qu'on a

$$w_A \left(1 + \frac{b}{B} \cdot \frac{C}{c}\right) = w_B . \qquad [2]$$

Dans ce cas d'engrenage intérieur, on peut réduire les deux pignons b et c à un seul (fig. 103), qui engrène tout à la fois, intérieurement avec la roue fixe C et extérieurement avec la roue mobile B.

La formule devient alors :

$$w_A \left(1 + \frac{C}{B}\right) = w_B .$$

150. Mouvement épicycloïdal sphérique. — Ce mécanisme indiqué par la figure 104 diffère de celui de la figure 102, en ce que l'axe mobile PQ de la rotation relative du double pignon est perpendiculaire à l'axe fixe MN, au lieu de lui être paral-

lèle. Les quatre roues qui engrènent deux à deux sont coniques, et l'une d'elles C est fixe.

En recommençant le raisonnement du numéro précédent, on retrouvera les mêmes formules, savoir : la formule [1], si les contacts des roues sont du même côté de PQ en T et S; la formule [2], s'ils sont de côtés différents en T et S′; enfin $w_B = 2w_A$ si, b étant égal à c, les contacts sont en S et S′.

Les systèmes épicycloïdaux, dans lesquels il entre plus de trois corps mobiles, seront décrits et examinés dans la seconde section.

DEUXIÈME SECTION

APPLICATIONS AUX MACHINES

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES CONSIDÉRÉES COMME APPAREILS DE COMMUNICATION ET DE TRANSFORMATION DE MOUVEMENT.

---

§ 1.

CLASSIFICATION DES MACHINES ÉLÉMENTAIRES.

151. Ancienne classification simplifiée. — Hachette, d'après les vues de Monge, et plus tard Lanz et Betancourt (*Essai sur la composition des Machines*, 1808) ont classé les mouvements dont sont animés les divers points des machines en trois genres, savoir : *mouvement rectiligne*, *mouvement circulaire* et *mouvement curviligne suivant une courbe autre que le cercle;* et ils ont subdivisé chacun de ces genres en deux espèces, selon que le mouvement d'un genre quelconque est ce qu'ils ont appelé *continu* (c'est-à-dire progressif, toujours de même sens) ou qu'il est *alternatif* (dit aussi de *va-et-vient*). Toute machine devant lier ou faire communiquer entre eux deux de ces mouvements, sans exclusion du cas où ils seraient de même espèce, Lanz et Betancourt ont indiqué vingt et un groupes de deux mouvements considérés comme transformés l'un en l'autre.

Mais le nombre de combinaisons binaires qu'il est utile de distinguer est beaucoup moindre. D'abord, tous ou presque tous les mécanismes qui établissent la liaison de deux mouvements progressifs, servent également à lier deux mouvements alternatifs, dont les instants d'arrêt sont simultanés. En second lieu, les seuls exemples que nous ayons à citer d'un mouvement circulaire ou rectiligne alternatif produisant un mouvement rectiligne progressif peut être considéré comme un cas particulier d'un mouvement circulaire alternatif transformé en circulaire progressif. Troisièmement, les mouvements curvilignes non circulaires qui se rencontrent dans la pratique ordinaire, sont dérivés des deux mouvements simples circulaire et rectiligne, savoir : le mouvement épicycloïdal ou simplement cycloïdal, et le mouvement héliçoïdal. Ainsi les diverses dispositions dites machines élémentaires, servant à lier deux mouvements, se trouvent rangées dans les cinq classes que nous définissons ci-après, en commençant par les mouvements circulaires, parce qu'ils sont les plus fréquents dans les machines, les plus faciles à régulariser, et enfin parce que le mouvement rectiligne n'est qu'un cas particulier du mouvement circulaire. Chaque classe se divise en genres relatifs aux conditions concernant les rapports et les directions des vitesses; et chaque genre sera subdivisé, au chapitre II, en considération des moyens employés pour réaliser les liaisons indiquées : soit communication par contact immédiat, soit emploi d'intermédiaires flexibles ou solides.

L'ensemble et les détails de cette classification seront facilement saisis, à l'aide des figures réunies, à la fin de ce Traité, en tableaux synoptiques, sous des numéros d'ordre spéciaux. Ces figures ne sont d'ailleurs que de simples croquis, destinés seulement à faire comprendre le principe et le caractère distinctif de chaque mécanisme.

Ire Classe. Liaison de deux mouvements circulaires simultanément progressifs ou alternatifs.

1er *Ordre*. Rapport des vitesses constant.

1er *Genre*. Axes parallèles.
2e — Axes concourants,
3e — Axes non situés dans un plan.

2e *Ordre*. Rapport des vitesses variable.

1er *Genre*. Axes parallèles.
2e — Axes non parallèles.

IIe Classe. Liaison de deux mouvements, l'un circulaire, l'autre rectiligne ou héliçoïde, changements de sens simultanés.

1er *Genre*. Translation parallèle au plan de la rotation.
2e — Translation parallèle à l'axe de la rotation.

IIIe Classe. Liaison de deux mouvements rectilignes.

Un seul Genre.

IVe Classe. Liaison de deux mouvements circulaires, l'un progressif, l'autre alternatif.

1er *Genre*. Axes parallèles.
2e — Axes non parallèles.

Ve Classe. Liaison de deux mouvements, l'un circulaire progressif, l'autre rectiligne alternatif.

1er *Genre*. Translation parallèle au plan de la rotation.
2e — Translation parallèle à l'axe de la rotation.

(Voir, pour la subdivision des genres, le chapitre II ou la table des matières.)

§ 2.

MOYENS D'ASSURER LA DIRECTION DU MOUVEMENT CIRCULAIRE OU RECTILIGNE DE CERTAINES PIÈCES DES MACHINES.

152. Appuis des arbres tournants. — Un corps qu'on veut assujettir à un mouvement de rotation est ordinairement traversé par une pièce solide sur laquelle il est fixé et qu'on appelle *arbre tournant* ou simplement *arbre*, nom qu'on ne devrait pas remplacer, comme on le fait quelquefois, par celui d'*axe*, qui appartient proprement à certaines lignes géométriques, et notamment à la droite autour de laquelle un arbre tourne.

Pour assurer la fixité de cet axe, pendant la rotation de l'arbre, celui-ci a des parties exactement arrondies, par lesquelles il est mis en contact avec des appuis immobiles. Si ces parties sont cylindriques et convexes, on les appelle *tourillons*. Un tourillon est terminé d'un côté au moins par un *épaulement*, offrant une zone plane perpendiculaire à l'axe de rotation, et se raccordant avec la surface cylindrique du tourillon par un *congé*, pour obvier aux chances de rupture que présenterait un angle vif rentrant.

Un tourillon horizontal s'appuie sur un *coussinet* formé ordinairement de deux pièces de rechange dites *coquilles*, l'une inférieure posée dans un corps fixe, l'autre supérieure maintenue par un *chapeau*. L'ensemble de ces diverses pièces s'appelle un *palier*. Un coussinet est terminé au moins d'un côté par une face plane contre laquelle s'appuie l'épaulement du tourillon. Deux épaulements en contact avec leurs coussinets empêchent l'arbre de se mouvoir parallèlement à l'axe.

Quelquefois, par exception, on fait reposer les tourillons d'un arbre horizontal chacun sur deux ou trois *roulettes* ou *galets*, afin de diminuer l'effet du frottement, comme nous l'expliquerons dans un autre Traité. Si le mouvement de l'arbre ne doit être

qu'oscillatoire, les galets complets peuvent être remplacés par des secteurs.

Un corps qui tourne autour d'un axe horizontal peut être porté et assujetti par des pointes immobiles (comme les pointes d'un tour ordinaire), qui entrent dans des trous coniques pratiqués dans le corps tournant.

Quelquefois ce corps, roue, poulie ou autre, est percé d'un trou cylindrique appelé *œil*, dans lequel entre avec un faible frottement un *essieu*, qui peut être fixe ou tourner lui-même indépendamment de la rotation du premier corps autour du même axe. Si le trou cylindrique est un peu long, en comparaison de l'épaisseur de la roue ou de la poulie, l'espèce de moyeu où il est pratiqué s'appelle *manchon* ou *canon*. L'arbre est alors muni d'épaulements faisant corps avec lui, ou de rondelles mobiles, qui empêchent le canon de glisser parallèlement à l'axe. Un canon porte souvent plusieurs roues ou poulies.

Lorsqu'un arbre tournant est vertical, il est ordinairement supporté et assujetti dans sa rotation au moyen d'un *pivot*, corps cylindrique tournant dans une pièce creuse qu'on nomme *crapaudine*. Tantôt le pivot est une sorte de tourillon appartenant au corps tournant, et la crapaudine est immobile ; tantôt c'est le contraire. Au fond de la crapaudine est une plaque mince en acier, appelée *grain*, qu'on remplace si elle s'use. Quelquefois on dispose la crapaudine de manière à pouvoir être facilement élevée ou abaissée à volonté (exemple : arbre des meules des moulins à blé).

A une distance plus ou moins grande du contact du pivot et de la crapaudine, l'arbre vertical est presque toujours maintenu, en un endroit où il est parfaitement arrondi, par un *collier* qui fait fonction de palier. Le plus souvent le collier est immobile dans toutes ses parties; mais quelquefois, si l'arbre qu'il embrasse est gros, on interpose entre lui et le cylindre creux et fixe dans lequel il tourne un système de *galets* ou *roulettes* destiné à diminuer le frottement.

Les plaques tournantes des chemins de fer donnent l'exemple d'un autre moyen d'assurer le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe vertical.

Outre qu'elle a un pivot cylindrique inférieur, qui tourne dans une crapaudine fixe, la plaque repose sur un système de galets qui ne sont pas cylindriques comme dans le cas précédent; ils sont en troncs de cônes ayant leur sommet en un point de l'axe de rotation de la plaque; ils roulent entre deux surfaces coniques qui ont leur sommet en ce même point, l'une fixée sur le sol inférieur, l'autre mobile avec la plaque à laquelle elle appartient. Pour trouver la relation qui existe entre le mouvement de la plaque, celui des axes des galets, et celui des galets eux-mêmes, on remarque que ceux-ci roulent sans glissement sur la surface conique fixe inférieure ; que par conséquent, à un instant quelconque, leur arête de contact sur cette surface est leur axe instantané de rotation, d'où il suit que si l'on considère une section circulaire faite dans un galet par un plan perpendiculaire à son axe, la vitesse du centre est la moitié de celle du point de contact de ce cercle avec la surface conique qui forme le dessous de la plaque; donc la vitesse angulaire de la plaque est double de celle des axes géométriques des galets. Quant à la vitesse angulaire d'un galet, elle est à celle de son axe comme la distance d'une des deux bases circulaires de ce galet à l'axe vertical de la plaque est au rayon de cette même base.

153. Assemblage fixe des roues sur leurs arbres. — Les roues qui doivent être invariablement liées à leurs arbres y sont fixées par des coins appelés *cales*, si les arbres sont polygonaux. Lorsque la roue et l'arbre sont métalliques, l'une s'assemble facilement et avec précision sur l'autre : l'arbre porte un renflement cylindrique de même diamètre qu'un œil ménagé dans le moyeu de la roue; il s'introduit à frottement doux dans cet œil, et l'assemblage se fixe par une cale appelée *languette* ou *clavette*, qui se loge à frottement dur dans deux *rainures* ménagées dans les deux pièces

154. Articulations à charnière. — Ce mode d'assemblage se rattache par une grande analogie au sujet qui vient de nous occuper. Deux corps articulés à charnière tournent, dans leur mouvement relatif, comme les deux branches d'un compas, chacun autour d'un axe géométrique invariablement lié aux deux corps. Telles sont les articulations ordinaires des bielles avec les balanciers et les manivelles. Une tête de bielle (fig. 105 et 106) est ordinairement formée d'une bande de fer AAA appelée *chape*, qui embrasse les deux coquilles d'un coussinet destiné à entourer le bouton ou tourillon fixé au balancier ou à la manivelle. Cet assemblage des coussinets et du corps de la bielle est maintenu au moyen de deux coins, nommés *clef* et *contre-clef à talon*, ayant le même angle et posés en sens inverses, de manière que les faces par lesquelles ils ne se touchent pas, sont et restent parallèles, quand on les éloigne ou qu'on les rapproche l'un de l'autre, en enfonçant ou en retirant la clef. Les talons de la contre-clef empêchent les branches de la chape de s'écarter.

On distingue deux espèces de têtes de bielle, l'une à *chape mobile* (fig. 105), l'autre à *chape fixe* (fig. 106). Quand on serre la clef dans la première, on raccourcit tant soit peu la bielle; dans la seconde, on l'allonge; c'est-à-dire que dans l'une on rapproche, et dans l'autre on écarte du corps de la bielle le centre d'articulation. Dans le premier cas la clef fait mouvoir la contre-clef, et celle-ci agit sur la chape qui rapproche les coquilles du coussinet; dans le second cas la clef agit immédiatement sur l'une des deux coquilles. On emploie ces deux espèces de têtes aux extrémités d'une même bielle, afin que la distance des articulations reste la même, malgré l'usure des boutons et des coussinets.

155. Guides du mouvement rectiligne. — Plusieurs moyens très-connus sont employés pour assujettir un corps solide à un mouvement de translation rectiligne. Nous citons notamment les suivants :

1° Rainures et languettes de diverses formes,

2° Œillets ou douilles glissant le long de tiges fixes,

3° Tiges mobiles traversant des douilles fixes,

4° Galets cylindriques roulant dans des rainures immobiles,

5° Galets à gorge roulant sur des guides saillants,

6° Roues à un seul rebord, analogues à celles qui roulent sur les rails des chemins de fer.

7° Balancier à bride (138), servant à diriger à très-peu près en ligne droite une des extrémités d'une tige, dont l'autre se meut sur la même droite suivant l'axe d'un cylindre.

CHAPITRE II.

MÉCANISMES DES TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT.

---

§ 1.

1re CLASSE. LIAISON DE DEUX MOUVEMENTS CIRCULAIRES PROGRESSIFS, AVEC CHANGEMENT DE SENS SIMULTANÉ.

1er GENRE. RAPPORT DES VITESSES CONSTANT. AXES PARALLÈLES.

156. Contact immédiat. — 1. (Tableau synoptique.) *Cylindres roulants.* — 2. *Engrenage extérieur.* — 3. *Engrenage intérieur.* — 4. *Engrenage héliçoïde.* Nous n'avons rien à ajouter ici, en ce qui concerne ces quatre mécanismes de deux corps tournants, à ce qui a été dit au § 1, chapitre III de la 1re section. Il n'y manque, au point de vue théorique, que ce qui regarde les forces, y compris les frottements, objets d'étude compris dans un traité subséquent. On y verra, par exemple, quelle doit être, suivant les circonstances, la pression mutuelle de deux cylindres roulants, pour qu'ils ne glissent pas l'un sur l'autre.

157. Poulies et courroie, corde ou chaîne dans un même plan moyen. — 5. *Courroie directe.* — 6. *Courroie croisée.* Ce mécanisme est très-fréquemment employé, à cause de la simplicité de son installation, même pour deux arbres fort éloignés l'un de l'autre, et parce que le mouvement s'y accomplit sans choc et sans bruit. Un fait important à remarquer, et dont la théorie sera étudiée ailleurs, c'est que le corps flexible qui embrasse et unit les deux poulies, peut glisser lorsqu'il n'est pas

assez tendu; or ce glissement, qu'on doit et qu'on peut ordinairement éviter, lorsque le maintien du rapport des vitesses angulaires est une condition essentielle de la machine, est au contraire un avantage dans certains cas de résistances accidentelles qui arrêtent brusquement l'une des deux poulies. L'emploi d'une courroie est alors préférable à un engrenage, dont les dents pourraient, en pareille circonstance, être rompues.

Lorsque la liaison des deux rotations se fait par une corde sans fin, les poulies ont une gorge dans laquelle cette corde s'engage. Mais lorsqu'on emploie une courroie, les poulies ne sont ni creuses dans leur profil méridien, ni munies de rebords saillants qui occasionneraient souvent un frottement nuisible. Il suffit que ce profil soit un peu bombé pour que la courroie en mouvement se maintienne d'une manière stable au milieu de la poulie. L'expérience a inspiré l'idée de cette disposition si simple : lorsqu'on se sert de poulies, ou plutôt de tambours, en forme de troncs coniques, on reconnaît que la courroie, en mouvement sur une pareille surface tournante, se déplace continuellement en se portant vers la plus grande base du tronc, à moins qu'un guide n'y mette obstacle. On en a conclu que si la poulie était formée de deux troncs de cônes opposés ayant leur grande base commune, les causes qui tendent à faire monter la courroie sur chacune des deux moitiés de la poulie la feraient rester au milieu. En pratique les deux troncs coniques sont raccordés par un bombement curviligne.

Quant à la loi que suit l'ascension de la courroie sur un tambour conique, elle ne paraît pas avoir jusqu'ici été étudiée, et elle est probablement assez compliquée, dépendant de la largeur, de la nature plus ou moins élastique, et même de la vitesse de la courroie. On voit bien que si une courroie, qui forme naturellement une bande plane, est appliquée sur la surface conique, développable, sans allongement d'un des bords et sans froncement de l'autre, ces deux bords, d'abord perpendiculaires à une génératrice du cône, sont ensuite obliques et de plus en

plus obliques à toutes les autres en s'éloignant de plus en plus du sommet, de la même manière que si la bande restant plane était appliquée sur la surface conique développée dans un plan. Les choses ne se passent pas tout à fait ainsi dans la courroie s'enroulant sur le tambour conique d'une machine; sa tension, agissant plus fortement sur le bord le plus rapproché de la plus grande base, l'oblige de s'allonger plus que l'autre, ce qui atténue mais ne détruit pas entièrement sa tendance au déplacement.

Lorsque les courroies ou cordes sans fin sont *directes ou non croisées* (n° 5), les rotations des deux poulies sont de même sens. Si les cordes ou courroies sont *croisées* (n° 6), les rotations sont de sens contraires. Dans les deux cas les vitesses angulaires seraient exactement réciproques aux rayons augmentés de la demi-épaisseur de la courroie, si celle-ci, quoique parfaitement flexible, était tout à fait inextensible dans sa ligne moyenne. Mais en réalité son allongement momentané dans la partie qui se meut de la poulie conduite à la poulie motrice fait que la circonférence de la première a sa vitesse moindre que celle de l'autre. Suivant M. Kretz (*Annales des mines*, 6e série, t. I), ce ralentissement est, d'après l'expérience, d'environ un cinquantième.

Lorsqu'une courroie sans fin est croisée, on la dispose de manière que sa face rugueuse (indiquée en pointillé dans la figure 6) s'applique sur les deux poulies, et qu'à l'endroit du croisement, ses deux parties glissent à plat, presque sans frottement, l'une sur l'autre.

158. Communication de deux rotations par l'intermédiaire de bielles. — 7. *Roues accouplées.* — 8. *Arbres coudés.* — 9. *Bras oscillants.* Les figures 7 et 8 indiquent comment les *manivelles* et *bielles* peuvent lier la rotation d'un arbre à celle d'un autre, dans le cas où les axes sont parallèles et où les vitesses angulaires sont à chaque instant égales. Les roues accouplées des grandes locomotives de chemins de fer en offrent des

exemples. Dans la figure n° 8, les arbres coudés ont chacun trois manivelles, et les bielles, pouvant être flexibles, agissent par tension.

Deux bras oscillants d'égale longueur (fig. 9), et unis par une bielle égale et parallèle à la distance des axes de rotation, ne diffèrent (sauf les détails de construction) du cas de la figure 7 qu'en ce qu'ils n'accomplissent pas des révolutions complètes.

159. Communication par un croisillon. — 10. *Joint d'Oldham.* Ce mode de liaison a été expliqué (145) page 193.

160. Trains de roues dentées ou de poulies à axes parallèles. — 11. *Quatre roues dentées.* Elles établissent une relation entre les rotations de trois arbres. La roue 1, montée sur le premier arbre, engrène avec la roue 2, fixée sur le second, lequel porte aussi la roue 3, engrenant avec la roue 4. Si l'on désigne par D_1, D_2, D_3, D_4 les diamètres primitifs des quatre roues, par N_1, N_2, N_3, N_4 leurs nombres de dents, par w, w', w'' les vitesses angulaires des trois arbres, on a, en exprimant que la vitesse linéaire est la même au point de contact de deux roues, soit qu'on le considère comme appartenant à l'un ou à l'autre de ces deux corps,

$$wD_1 = w'D_2 \quad \text{et} \quad w'D_3 = w''D_4,$$

d'où

$$\frac{w''}{w} = \frac{D_1 \cdot D_3}{D_2 \cdot D_4} \quad \text{ou} \quad \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{N_3}{N_4}.$$

Exemple :

$$N_1 = 23, \quad N_2 = 8, \quad N_3 = 25, \quad N_4 = 9; \quad \frac{w''}{w} = \frac{575}{72}.$$

Il ne serait pas possible d'obtenir ce même rapport de vitesses avec deux roues ayant moins de 575 et 72 dents. On voit d'ail-

leurs que les deux roues extrêmes, 1 et 4, tournent en sens contraires si les deux engrenages sont extérieurs.

La figure n° 12 indique une relation analogue obtenue par deux cordes ou courroies sans fin, entre les rotations autour de trois axes dont les distances peuvent être grandes. En désignant par D_1, D_2, D_3, D_4 les diamètres des poulies, et par w, w', w'' les vitesses angulaires des trois arbres, on trouve aisément que les équations précédentes subsistent. Le sens de la rotation change d'une poulie à celle qui lui est conjuguée si la corde ou courroie est croisée.

13. *Roues de vitesses différentes autour du même axe.* Les deux roues extrêmes 1 et 4, liées entre elles par les roues 2 et 3, peuvent tourner autour d'un même axe géométrique. Dans ce cas l'une de ces deux roues est calée sur son arbre, tandis que l'autre l'est sur un manchon ou canon dont la vitesse angulaire est différente de celle de l'arbre central. Si, ce qu'il est facile de réaliser, le rapport des vitesses angulaires du canon et de l'arbre est très-grand, à un grand nombre de tours de l'un répond un petit déplacement angulaire de l'autre.

161. Roue ou poulie intermédiaire. — Ces dispositions, représentées par les figures n° 14, sont des cas particuliers des précédentes. 1° Deux roues 1 et 3 sont liées entre elles par une roue unique 2, intermédiaire, avec laquelle elles engrènent; leurs rotations sont de même sens; elles ont d'ailleurs même pas et le même rapport de vitesse que si elles engrenaient immédiatement ensemble. 2° Deux poulies 1 et 3 sont liées par deux courroies embrassant un même tambour 2, ou bien 3° une même corde embrasse les trois poulies 1, 2 et 3. Le sens de rotation de deux poulies diffère ou est le même selon que la corde qui les joint rencontre ou ne rencontre pas la ligne des centres dans l'intervalle de ces deux centres.

162. Communication par mouvement épicycloïdal plan.

— Le mécanisme classé sous le n° 15 est une extension de celui qui a été étudié au n° 149 (fig. 102). La barre **A** tournant autour de l'axe **MN** porte et entraîne un double pignon mobile relativement à la barre autour de l'axe **PQ**, parallèle à **MN**. Les deux roues **b** et **c** de ce double pignon engrènent respectivement avec les deux roues **B** et **C** qui tournent autour de l'axe géométrique **MN**. On demande la relation qui existe entre les vitesses angulaires w_A, w_B et w_C de la barre et des roues **B** et **C**.

Désignons par les lettres italiques B, C, b et c les rayons primitifs des roues que ces mêmes lettres en caractères romains nous servent à indiquer dans la figure ; et prenons pour inconnue auxiliaire la vitesse angulaire W du double pignon *relativement* à la barre **A**.

En raisonnant comme au n° 149, nous avons :

en S, $$w_A B - W b = w_B B,$$

en T, $$w_A C - W c = w_C C,$$

d'où

$$w_A\left(\frac{B}{b} - \frac{C}{c}\right) = w_B \frac{B}{b} - w_C \frac{C}{c} \qquad [1]$$

Ainsi, connaissant deux des trois vitesses angulaires autour de **MN**, on calculera la troisième, puis, si l'on veut, la vitesse relative W.

Si par un mécanisme très-facile à imaginer on fait en sorte que le rapport de deux des trois vitesses ait une valeur connue, on en conclura le rapport de la troisième à chacune des deux autres.

Remarques. — I. Si la roue **B** enveloppait la roue **b** et était par conséquent à dents intérieures, les équations précédentes subsisteraient moyennant le changement de signe de $\frac{B}{b}$, comme il est facile de le vérifier.

II. Si l'une des pièces **A**, **B**, **C** tourne en sens contraire du sens que supposent les formules, celles-ci subsistent moyennant le changement du signe de la rotation de cette pièce.

Dans le cas particulier où les deux roues **B** et **C** ont des vitesses égales (ce qu'on réaliserait par divers moyens, et entre autres en fixant (fig. 107) sur les canons de ces deux roues deux roues coniques égales **B'** et **C'** engrenant avec une troisième **D** à axe fixe), la formule [1], dans laquelle il faut faire $w_C = -w_B$, devient

$$w_A (Bc - Cb) = w_B (Bc + Cb).$$

Soit, par exemple,

$$\frac{Bc}{bC} = \frac{61 \cdot 41}{51 \cdot 49} = \frac{2501}{2499};$$

il en résulte

$$w_A = 2500\, w_B.$$

Ainsi, pendant que chacune des roues **B** et **C** fait un tour, le bras **A** et son arbre en font 2500.

Les rayons des quatre roues du système épicycloïdal doivent satisfaire à la condition $B + b = C + c$; les nombres 61, 51, 49 et 41 sont ceux de leurs dents.

III. Dans les figures n° 15 et 107 la barre **A** est liée invariablement à l'arbre **MN**, qui participe à la rotation w_A. Il pourrait en être autrement : les trois corps **A**, **B**, **C** qui tournent autour du même axe géométrique **MN** peuvent être libres sur l'arbre, ou bien l'un quelconque des trois peut y être fixement attaché et par conséquent l'entraîner dans sa rotation. Dans la figure 15, le double pignon est partie au-dessus, partie au-dessous de la barre; il peut au besoin être tout entier d'un côté ou de l'autre, comme dans les figures 102 et 107.

163. Exemple : Horloge hebdomadaire et lunaire. — Dans le système de rouages indiqué par la figure 108, les rotations des deux arbres parallèles **KL** et **MN** sont liées de manière que, tandis que le premier, **KL**, mené par un mécanisme d'horloge ordinaire, fait un tour en une *semaine*, le second, **MN**, doit faire le sien en un *mois lunaire*, dont la durée moyenne est de 29 jours, 530 588.

Des aiguilles étant fixées sur ces arbres ou sur d'autres ayant le même rapport de vitesses angulaires, la première marque sur un cadran le jour de la semaine, et l'autre indique l'âge de la lune. Le tour du cadran est donc divisé pour la première aiguille en 7 parties égales, et pour la seconde en 30 parties, dont la dernière n'est que les 0,53 de chacune des 29 autres.

Le rapport des vitesses angulaires réciproques aux durées des révolutions doit être $\frac{29{,}530\,588}{7}$.

Voici comment *Pecqueur*, mécanicien constructeur à Paris, a réalisé cette condition très-approximativement.

La roue **a**, calée sur son arbre **KL**, engrène avec la roue **A**, folle sur son arbre **MN**, laquelle porte et entraîne un canon creux où tourne librement l'arbre **PQ**, lié aux deux roues **b** et **c**. La roue **b** engrène avec la roue **B**, qui est immobile et dont le centre est dans l'axe géométrique de l'arbre **MN**. La roue **c** engrène avec une roue **C** calée sur ce même arbre **MN**.

En conservant les notations précédentes et faisant $w_B = o$ dans la dernière équation [1], on en tire

$$\frac{w_A}{w_C} = \frac{bC}{bC - cB},$$

d'où, à cause de $w_A \cdot A = w_a \cdot a$, on conclut

$$\frac{w_a}{w_C} = \frac{A}{a}\,\frac{bC}{bC - cB}. \qquad [2]$$

Pour obtenir les valeurs qu'il convient de donner aux quan-

tités A, a, B, b, C et c, qui seront les nombres entiers de dents des six roues, on remplace le rapport donné par une fraction ordinaire qui en diffère très-peu et qu'on obtient par la méthode des *fractions continues*.

On décompose les deux termes de la fraction approximative en leurs facteurs premiers. On est ainsi conduit à poser

$$\frac{w_a}{w_c} = \frac{188190}{44609} = \frac{2 \cdot 27 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41}{31 \cdot 1439},$$

expression qu'on parvient sans grande difficulté à identifier avec la formule [2] en faisant, comme a fait Pecqueur,

$$\frac{A}{a} = \frac{54}{31} \quad \text{et} \quad \frac{bC}{cB} = \frac{85 \cdot 41}{62 \cdot 33},$$

ce qui donne

$$\frac{w_a}{w_c} = \frac{54}{31} \cdot \frac{85 \cdot 41}{85 \cdot 41 - 62 \cdot 33} = \frac{54 \cdot 85 \cdot 41}{31 \cdot 1439} = \frac{188190}{44609}.$$

Cette expression fractionnaire ne diffère presque pas du rapport indiqué, car elle est égale à

$$\frac{29{,}530\,585\,7\ldots}{7} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{29{,}530\,588}{7},$$

de sorte que l'horloge dont il s'agit pourrait marcher pendant 7000 jours ou 19 ans, avant de se trouver en retard de 0,0023 de jour ou 3 minutes 1/3 sur l'âge moyen de la lune.

Le nombre 1439, qui entre en facteur dans l'expression du rapport approché, étant premier, on n'aurait pu réaliser ce rapport par un train de roues à axes fixes, à moins que l'une d'elles n'eût eu 1439 dents. On voit que la communication des rotations par mouvement épicycloïdal réduit la difficulté à rem-

placer ce nombre par la différence de deux nombres, dont l'un soit le produit de deux facteurs de 188 190, et l'autre décomposable en deux facteurs qui ne soient ni trop petits ni trop grands pour être les nombres des dents des roues **c** et **B**.

164. Exemple de l'emploi de plusieurs mouvements épicycloïdaux sur un même bras. — La pièce **A** (fig. 109) tournant autour du même axe **MN** que les deux roues **B** et **C** porte trois doubles pignons formés des roues **b'** et **B'**, **b** et **c**, **C''** et **c''**. En appelant **W'**, **W** et **W''** les vitesses angulaires de ces trois doubles pignons relativement au corps tournant **A**, on verra, toujours d'après la considération de la composition des vitesses, qu'on a

en **S**, $$\mathbf{W}b = \mathbf{W}'B',$$

en **T**, $$\mathbf{W}c = \mathbf{W}''C'',$$

en **S'**, $$w_B B = w_A B + \mathbf{W}'b' = w_A B + \mathbf{W}\frac{bb'}{B'},$$

en **T''**, $$w_C C = w_A C + \mathbf{W}''c'' = w_A C + \mathbf{W}\frac{cc''}{C''};$$

d'où

$$w_A\left(\frac{BB'}{bb'} - \frac{CC''}{cc''}\right) = w_B\frac{BB'}{bb'} - w_C\frac{CC''}{cc''},$$

formule dont l'analogie avec l'équation [1] du n° 162 est facile à apercevoir.

Remarque. — Les communications de rotations qui viennent d'être supposées obtenues par des engrenages pourraient être réalisées par des poulies et courroies sans fin, si ce n'est que l'exactitude précise des rapports risquerait d'être altérée par le glissement de ces organes.

165. Communication par mouvement épicycloïdal sphé-

rique (n° 16 du tableau synoptique). — Le mécanisme mis sous le n° 16 est une extension de celui qui a été indiqué précédemment (150) par la figure 104.

La pièce **A**, qui peut être une roue ou une poulie tournant autour de l'axe **MN**, porte et entraîne un double pignon **bc** mobile, relativement à cette pièce **A**, autour de l'axe **PQ**, perpendiculaire à **MN**. Les deux roues coniques **b** et **c** fixées sur un canon engrènent respectivement avec les deux roues coniques **B** et **C**, qui tournent toutes deux autour de l'axe géométrique **MN**.

On trouve, en suivant la même marche qu'au n° 162, la relation qui lie les vitesses angulaires w_A, w_B et w_C du corps **A** et des deux roues **B** et **C**.

En désignant par B, C, b, c les rayons primitifs des quatre roues, et par W la vitesse angulaire du double pignon relativement au corps tournant **A**, on a

en **S**, $$w_A B + W b = w_B B,$$

en **T**, $$w_A C - W c = w_C C;$$

d'où

$$w_A \left(\frac{B}{b} + \frac{C}{c}\right) = w_B \frac{B}{b} + w_C \frac{C}{c},$$

formule générale quant aux signes des rotations, qui détermine une quelconque des trois vitesses angulaires autour de **MN**, en fonction des deux autres, ou l'un de leurs deux rapports en fonction de l'autre.

Remarque. — Si la roue conique **C**, au lieu d'être au-dessous de l'axe **PQ**, était au-dessus, du même côté que la roue **B**, il faudrait dans la dernière formule changer le signe de c.

CAS PARTICULIER. *Addition de deux vitesses angulaires.* Si dans

la formule précédente on fait $\frac{B}{b} = \frac{C}{c}$, ou, plus simplement, fig. 110, si l'on réduit le double pignon à une seule roue en mouvement épicycloïdal, engrenant avec deux roues égales **B** et **C**, ce qui revient à faire $b = c$ et en même temps $B = C$, l'équation devient, comme il serait très-aisé de le voir directement,

$$2w_A = w_B + w_C;$$

ainsi, lorsque w_B et w_C sont variables, w_A varie proportionnellement à leur somme.

166. Théorie générale des trains épicycloïdaux. — Les exemples précédents indiquent une marche facile et sûre pour résoudre toutes les questions analogues à celles qui viennent d'être traitées; il suffit pour cela de s'appuyer sur la notion évidente de la composition de deux vitesses de même sens ou de sens contraires suivant une même droite. Mais les relations qui existent entre les vitesses absolues ou relatives des diverses parties d'un système en mouvement épicycloïdal peuvent être exprimées par des formules générales, dont l'emploi est utile, surtout lorsque, comme dans l'exemple du n° 164, plusieurs axes de rotation relative sont entraînés dans un même mouvement circulaire absolu autour de l'axe principal.

La figure 111 aidera à comprendre ce qu'il faut entendre par un train épicycloïdal (*).

AA est un corps solide tournant autour de l'axe géométrique fixe **MN**. Il entraîne dans son mouvement un système d'arbres tournants **PP**, **QQ**, **RR**, ... dont les axes sont fixes relativement

(*) Les notions qui suivent sont la plupart empruntées pour le fond à l'ouvrage déjà cité de M. Willis (*Principles of mechanism*), pages 361 et suiv. Les démonstrations qu'on va lire sont différentes des siennes et plus simples, parce qu'elles sont tirées immédiatement de la théorie de la composition des rotations numéros 61 et suiv.

à ce corps solide **AA**, lequel remplit à l'égard du système la fonction du bâti ou support fixe d'un mécanisme ordinaire composé de diverses pièces tournantes. Ce support tournant, auquel M. Willis a donné le nom de *bras porte-train* (train-bearing arm), a le plus souvent la forme d'une simple barre; mais en général sa forme est appropriée aux pièces qu'il soutient et emporte dans son mouvement circulaire.

Les arbres **PP**, **QQ**, **RR**, ... ainsi *entraînés* par le support **AA**, sont en relation entre eux par engrenages ou par poulies et courroies sans fin, de manière que ces corps étant considérés relativement au support pris pour système invariable de comparaison, le mouvement de rotation du premier arbre **PP** se lie en rapport déterminé à celui du second **QQ**, celui-ci à la rotation du troisième **RR**, et ainsi de suite. (Les axes de ces arbres successifs peuvent n'être pas dans un même plan, comme la figure 111 les suppose pour plus de simplicité.)

De plus, le premier des arbres entraînés, **PP**, est lié par engrenage ou par courroie à une roue **B** tournant simplement, comme le support **AA**, autour de l'axe géométrique **MN**, mais avec une vitesse angulaire généralement différente.

Enfin le dernier des arbres entraînés (dans la figure 111 c'est l'arbre **RR**) peut aussi être lié par roue dentée ou par poulie et courroie sans fin, à une autre roue ou poulie **C**, tournant simplement comme **B** et **AA**, mais avec une vitesse angulaire généralement différente, autour de l'axe **MN**.

Cet ensemble est appelé par M. Willis *epicyclic train*, qu'on peut traduire par *train épicycloïdal*.

Un cas particulier qui pourrait se réaliser est celui où les trois vitesses angulaires des deux roues extrêmes **B** et **C** et du support **AA** seraient égales et de même sens. Alors tout l'ensemble, roues **B** et **C**, support et ses rouages, tournerait autour de l'axe géométrique principal **MN**, comme s'il était solidifié. Il serait en repos relativement au support tournant.

Un autre cas particulier utile à considérer est celui où le bras

porte-train est en repos. Le mouvement de chaque pièce de l'ensemble est alors une rotation simple, et toutes les rotations ont entre elles des rapports conformes aux règles précédemment établies (159).

Dans le cas général où le support **AA** et la roue **B** ont des vitesses angulaires différentes, le mouvement d'une quelconque des pièces entraînées est un mouvement composé de la rotation d'entraînement du support et de la rotation simple de cette pièce relativement au support pris pour système solide de comparaison.

Cela posé et bien compris, deux questions se présentent :

PREMIÈRE QUESTION. *Les proportions des divers rouages étant données, trouver la relation entre les trois vitesses du bras porte-train* **AA** *et des deux roues extrêmes* **B** *et* **C**.

Appelons ces trois vitesses w_A, w_B et w_C, supposées positives quand elles sont dans un certain sens autour de **MN**, et négatives dans le cas contraire; introduisons dans le calcul les vitesses angulaires des roues **B** et **C** relativement au support **AA**, et désignons ces vitesses relatives par W_B et W_C, dont les valeurs sont également susceptibles de l'un ou l'autre signe.

La rotation absolue w_B est la résultante de la rotation d'entraînement w_A et de la rotation relative W_B; et comme ces vitesses sont autour d'un même axe, il en résulte, eu égard aux signes, l'équation

$$w_B = w_A + W_B. \qquad [1]$$

De même w_C est la résultante ou la somme algébrique de la même vitesse d'entraînement et de la rotation relative W_C; ainsi

$$w_C = w_A + W_C. \qquad [2]$$

Or les rotations W_B et W_C ont entre elles un rapport facile à trouver quant à sa valeur numérique et à son signe, lorsque les proportions du train sont données, puisque ce rapport, in-

dépendant du mouvement du support, est précisément celui des vitesses angulaires qu'auraient les roues B et C si le bras porte-train était en repos et les rouages en mouvement. On est ainsi conduit à tirer des deux équations précédentes la relation demandée

$$\frac{w_C - w_A}{w_B - w_A} = \frac{W_C}{W_B}. \qquad [3]$$

M. Willis désigne ce rapport $\frac{W_C}{W_B}$, tantôt positif et tantôt négatif, par la lettre unique ε; en l'adoptant, mais en conservant les notations expressives w_A, w_B et w_C au lieu des lettres a, m et n par lesquelles il indique les trois rotations, nous avons la formule

$$\frac{w_C - w_A}{w_B - w_A} = \varepsilon. \qquad [4]$$

Cette formule, nous le répétons, s'applique à tous les cas possibles, pourvu qu'on ait égard aux signes, c'est-à-dire aux sens des vitesses angulaires. Les proportions des rouages du train étant données et par conséquent le rapport ε égal à $\frac{W_C}{W_B}$ étant connu, on peut disposer à volonté de deux des trois vitesses angulaires w_A, w_B, w_C, et calculer la troisième. Ainsi, par exemple, on peut mettre l'équation générale sous la forme

$$w_C = w_A (1 - \varepsilon) + w_B \varepsilon, \qquad [5]$$

où l'on remarque que w_C est la somme des deux valeurs particulières que cette rotation prendrait si l'on supposait successivement les rotations w_A du bras et w_B de la première roue séparément nulles.

Si l'une des rotations, w_A par exemple, était constante, et une autre w_B variable, la troisième w_C se composerait de deux

parties, l'une constante proportionnelle à w_A, l'autre variable proportionnelle à w_B.

Le lecteur vérifiera facilement l'accord de la formule générale avec celles qui ont été obtenues directement pour les questions posées aux articles 162, 164 et 165.

DEUXIÈME QUESTION. *Les proportions des divers rouages étant données depuis la première roue* **B** *jusqu'à un arbre quelconque* **Q** *du train (dont le reste depuis l'arbre* **RR** *jusqu'à la roue* **C** *peut être supprimé), trouver la relation entre les deux vitesses angulaires absolues w_A du porte-train et w_B de la roue* **B**, *et les vitesses qui caractérisent le mouvement composé de l'arbre* **Q**.

L'axe de l'arbre entraîné **Q** peut être parallèle à l'axe commun **MN** de la rotation du bras **AA** et de la roue **B**; il peut concourir en un point avec cet axe; enfin il peut n'être pas avec lui dans un même plan. C'est ce qui constitue trois cas que nous allons considérer successivement.

PREMIER CAS. *Axes parallèles.* L'axe de l'arbre **QQ** décrit alors un cylindre. Soit q sa distance à l'axe commun **MN**. Le mouvement de l'arbre **QQ** est alors composé 1° d'une translation circulaire dont la vitesse linéaire est celle de son axe, exprimée par qw_A, et 2° d'une rotation simple que nous désignons par w_Q, parce qu'elle est égale à la vitesse angulaire de l'arbre **QQ** autour de son axe instantané de rotation (66).

Le mouvement de l'arbre **QQ** peut aussi être considéré comme composé de la rotation d'entraînement w_A du porte-train et de la rotation W_Q de l'arbre **QQ** relativement à ce support. Or les deux axes de ces rotations étant, par hypothèse, parallèles, on a (63), quels que soient les signes, l'équation

$$w_Q = w_A + W_Q, \qquad [6]$$

laquelle, jointe à celle-ci qui subsiste, comme dans la première question, [1],

$$w_B = w_A + W_B,$$

donne une équation semblable à celle qui a été tout à l'heure obtenue, [3],

$$\frac{w_Q - w_A}{w_B - w_A} = \frac{W_Q}{W_B}. \qquad [7]$$

Ce dernier rapport dépend uniquement, grandeur et signe, des liaisons qui existent entre l'arbre **Q** et la roue **B**. C'est le rapport des rotations de ces deux corps, dans le cas où le support **AA** serait immobile et les rouages en mouvement. On peut encore le désigner par la lettre unique ε, *qui signifiera toujours le quotient algébrique obtenu en divisant la rotation, relative au support, du dernier arbre considéré par la rotation, relative au même support, de la première roue.* La formule devient ainsi

$$\frac{w_Q - w_A}{w_B - w_A} = \varepsilon, \quad \text{ou} \quad w_Q = w_A(1-\varepsilon) + w_B\varepsilon. \qquad [8]$$

Deuxième cas. *Axes* **MN** *et* **QQ** *concourants.* L'axe de l'arbre **QQ** décrit un cône, ou un plan s'il est perpendiculaire à **MN**. Soit α son angle avec **MN**. Le mouvement absolu de l'arbre est une rotation instantanée w_Q autour d'un axe mobile, mais passant constamment au point de concours des deux axes (48).

Cette vitesse angulaire w_Q est la résultante de la rotation d'entraînement w_A et de la rotation W_Q de l'arbre considéré relativement au porte-train. On a donc (61)

$$w_Q^2 = w_A^2 + W_Q^2 + 2\,w_A W_Q \cos\alpha. \qquad [9]$$

On a d'ailleurs toujours [1]

$$w_B = w_A + W_B \quad \text{ou} \quad w_B = w_A + \frac{W_B}{W_Q}.W_Q,$$

ou encore

$$w_B = w_A + \frac{W_Q}{\varepsilon}.$$

Le rapport $\frac{W_Q}{W_B}$ ou ε est donné par les proportions du train; il ne reste donc dans ces deux équations [9] et [1] que deux inconnues W_Q et w_Q.

TROISIÈME CAS. *Axes* **MN** *et* **QQ** *non situés dans un même plan.* L'axe de l'arbre **QQ** décrit un hyperboloïde de révolution dont l'axe est **MN** et dont le cercle de gorge a pour rayon la distance perpendiculaire aux deux axes. Le mouvement de l'arbre solide, quel qu'il soit, peut (67) se réduire à une translation circulaire et à une certaine rotation autour d'un axe instantané. Nous désignons encore cette rotation par w_Q, en continuant d'appeler W_Q la vitesse angulaire du même arbre relativement au porte-train.

On a toujours la relation [1]

$$w_B = w_A + W_B,$$

et comme le rapport $\frac{W_Q}{W_B}$ est encore donné par les proportions du train, on obtient W_Q comme précédemment en fonction très-simple des deux rotations de **A** et de **B**, savoir

$$W_Q = \frac{W_Q}{W_B}(w_B - w_A),$$

et il ne reste plus qu'à composer W_Q, rotation relative, avec w_A, rotation d'entraînement, et avec la translation circulaire commune à un point de l'axe **Q**, suivant les règles établies à l'article 67 et mises en pratique à l'article 115, pour obtenir toutes les circonstances du mouvement de l'arbre **QQ** dans l'espace.

Emploi pratique des trains épicycloïdaux. M. Willis range en quatre classes les divers usages qu'on peut en faire.

PREMIER USAGE. Il a lieu lorsque le mouvement épicycloïdal, c'est-à-dire celui d'un corps tournant autour d'un axe qui tourne lui-même autour d'un autre axe, fixe, est le but spécial qu'on se propose.

Tracé mécanique des courbes épicycloïdales. Si, par exemple, l'axe de l'arbre QQ mobile est parallèle à l'axe fixe MN, un point quelconque adhérent à cet arbre et plus ou moins éloigné de son axe, décrit dans l'espace une courbe plane qui peut être dessinée sur un plan fixe par une pointe traçante T.

Le mouvement du corps QQT est alors, comme nous l'avons dit (2e question, 1er cas), composé de la translation circulaire qw_A et de la rotation w_Q.

Mais il peut, plus simplement encore, se ramener à une rotation unique, instantanée, équivalente à un roulement cylindrique, suivant ce qui a été expliqué à l'article 66. Le plan de la figure 112 étant perpendiculaire aux axes de rotation, soient M la projection de l'axe fixe, et Q celle de l'axe mobile à un instant quelconque. La vitesse de la rotation w_A étant dans le sens de la flèche, la vitesse de la translation circulaire est représentée par $QV = q.w_A$. La rotation composante w_Q étant supposée de même sens que w_A, l'axe instantané O du corps entraîné s'obtient en écrivant que, considéré comme invariablement lié à ce corps, il a actuellement et instantanément sa vitesse nulle dans l'espace. Or en représentant la distance OQ par x, on remarque que la vitesse du point O se compose de la translation $q.w_A$ dirigée au-dessus de MO, et de la vitesse $x.w_Q$ en sens contraire due à la rotation w_Q. Donc la situation de l'axe instantané O est donnée par l'équation

$$x.w_Q = q.w_A. \qquad [10]$$

Ainsi il suffirait de connaître le rapport des rotations w_Q et w_A, et la distance q de leurs axes, pour en conclure l'autre dis-

tance x, et se figurer que le corps entraîné **QQT** se meut comme s'il était invariablement lié à un cylindre dont le rayon serait x, roulant sur un cylindre fixe qui aurait **MN** pour axe et **MO** ou $q - x$ pour rayon.

Les vitesses angulaires w_Q et w_A sont d'ailleurs, comme on l'a vu, liées à la rotation w_B par l'équation [8]

$$w_Q = w_A (1 - \varepsilon) + w_B \cdot \varepsilon .$$

Concluons : 1° que si l'on se donne un train épicycloïdal et par conséquent les quantités ε et q et si l'on assigne une valeur déterminée au rapport $\frac{w_B}{w_A}$ des rotations de la première roue **B** et du porte-train **A**, on pourra calculer $\frac{w_Q}{w_A}$ et par suite x. Si l'on se donne en outre la distance r de la pointe traçante à l'axe **Q**, la courbe décrite sera parfaitement déterminée et pourra être graphiquement construite par points. Dans le cas particulier où la distance r serait prise égale à x, c'est-à-dire à $q \cdot \frac{w_A}{w_Q}$, le point décrivant serait sur la surface même du cylindre roulant et la courbe serait une épicycloïde.

2° Réciproquement, si l'on se donne x et $q - x$, rayons des deux cylindres dont l'un roule sur l'autre, on en conclura $\frac{w_Q}{w_A}$ égal à $\frac{q}{x}$ et il ne restera plus qu'à déterminer $\frac{w_B}{w_A}$ et ε de manière à satisfaire à l'équation [8]

$$\frac{w_Q}{w_A} = 1 - \varepsilon + \frac{w_B}{w_A} \varepsilon .$$

Cela pourra se faire d'une infinité de manières; et ce qui sera le plus simple, sans altérer la courbe décrite, sera de

faire $w_B = o$, c'est-à-dire de rendre la roue **B** fixe dans l'espace. La courbe sera alors décrite par l'effet du mouvement du porte-train, et la dernière formule se réduira à

$$\frac{w_Q}{w_A} = 1 - \varepsilon, \qquad [11]$$

en laissant subsister l'équation [10]

$$\frac{w_Q}{w_A} = \frac{g}{x}.$$

Construction graphique de la courbe épicycloïdale. L'équation [11] fournit le moyen de construire par points la courbe dont il s'agit. Il suffit pour cela de considérer le rapport $\frac{w_Q}{w_A}$ comme étant celui des déplacements angulaires simultanés du corps **QQT** entraîné et du porte-train. Ainsi la figure 113 étant dans le plan de la courbe, **M** son intersection avec l'axe fixe **MN**, et Q_0 son intersection avec l'axe mobile **QQ** à un instant initial, soit T_0 la position à ce même instant du point décrivant. Pour obtenir un autre point T_1 de la courbe, on supposera que le porte-train a tourné d'un angle α, ce qui a amené l'axe mobile en Q_1, et l'on tracera Q_1N_1 parallèle à Q_0T_0, puis la droite Q_1T_1 égale à Q_0T_0 et faisant avec Q_1N_1 l'angle β égal à $(1-\varepsilon)\alpha$, ce qui revient à faire avec le prolongement de MQ_1 un angle $\varepsilon\alpha$ en sens contraire de l'angle α, si ε est positif; (et en effet dans ce cas la rotation relative W_Q du rayon **QT** doit être de même sens que la rotation relative W_B, et puisque la roue **B** est immobile dans l'espace, sa rotation relativement au porte-train est égale en sens contraire à la rotation w_A de ce support; c'est ce que dit d'ailleurs l'équation [1] quand on y fait $w_B = o$).

La construction qui vient d'être indiquée est conforme à ce qui a été décrit à l'article 65 pour la figure 26.

Le tracé mécanique des courbes épicycloïdales fournit des figures très-variées applicables au dessin d'ornement. Le *Traité de Cinématique* de M. Ch. Laboulaye, pages 583 à 587, en offre des exemples curieux.

DEUXIÈME USAGE DES TRAINS ÉPICYCLOÏDAUX. Ce genre de mécanisme sert à établir entre les vitesses angulaires de deux arbres un rapport exprimé par deux nombres dont les facteurs premiers sont très-grands. Nous en avons vu un exemple à l'article 163. A cette classe des applications se rapporte le cas où, deux rotations étant données, on en obtient une troisième égale à la demi-somme des deux autres, comme il est expliqué à l'article 165.

TROISIÈME USAGE. Il a lieu lorsque, une rotation étant donnée, on veut en obtenir une autre beaucoup plus lente. L'article 162 en indique un exemple.

QUATRIÈME USAGE. Ce dernier emploi d'un train épicycloïdal se réalise lorsque, comme nous l'avons dit en terminant la solution de la deuxième question, page 223, deux rotations étant données, l'une constante, l'autre variable, il s'agit d'en obtenir une troisième, composée de deux parties respectivement proportionnelles à ces deux rotations.

2e GENRE. RAPPORT DES VITESSES CONSTANT. AXES CONCOURANTS.

167. Contact immédiat. — 17. *Cônes roulants.* — 18. *Engrenage conique.* Nous n'avons rien à ajouter ici à ce qui a été dit au chapitre III, articles 106 et 107. Les mécanismes indiqués ci-après (169, 170 et 171) sont applicables au cas particulier où les axes extrêmes sont dans un même plan.

3e GENRE. RAPPORT DES VITESSES CONSTANT. AXES NON SITUÉS DANS UN MÊME PLAN.

168. Axes rectangulaires, contact immédiat. — 19. *Vis sans fin.* La théorie de ce mécanisme a été expliquée aux articles 110 et suivants, où l'on a vu la distinction à faire entre la vis sans fin à simple contact et la vis à contact curviligne connue sous le nom abrégé de *vis tangente*.

169. Axes pouvant faire un angle quelconque, contact immédiat. — 20. *Engrenage hyperboloïde.* Ce sujet a été développé aux articles 114 et suivants. Ce genre d'engrenage peut être employé lorsque les axes sont trop rapprochés pour permettre l'emploi de la vis sans fin. Il est d'ailleurs plus favorable sous le rapport du frottement.

170. Axe intermédiaire concourant avec les deux autres. — 21. *Quatre roues coniques.* La figure indique suffisamment cette combinaison.

171. Axe intermédiaire concourant avec l'un des axes extrêmes, et parallèle à l'autre. — 22. *Deux roues dentées coniques et deux roues cylindriques.* Ces deux dernières peuvent être remplacées par deux poulies et une courroie sans fin.

172. Deux axes intermédiaires. — 23. *Poulies de renvoi.* Quels que soient les deux axes **A** et **B** des deux rotations à mettre en communication, on peut se les représenter comme horizontaux. Les plans moyens des deux poulies sont verticaux et se coupent suivant une verticale **II**. Des points **C** et **D** pris à volonté sur cette droite, on mène les tangentes **CE, CF, DG, DH**; dans les angles **ECF, GDH**, on dispose deux poulies dites *de renvoi*, **C** et **D**, dont on assujettit les axes perpendiculairement aux plans de ces deux angles; la corde sans fin **ECFHDGE** embrasse les quatre poulies, de manière que le mouvement de l'une d'elles entraîne la rotation des trois autres.

173. Courroie sans fin oblique. — 24. *Une seule courroie sans fin sur deux poulies non parallèles.* Cette disposition est fondée sur un fait remarquable : lorsqu'une courroie passe sur une poulie, il faut, pour qu'elle s'y maintienne, que la partie **AB** (fig. 114) qui se transporte vers cette poulie ait sa ligne-milieu dans le plan moyen de la poulie, perpendiculaire à son axe de

rotation; mais il est sans inconvénient que la partie **CD**, qui quitte la poulie, ait une certaine obliquité. Cela vient de ce que la courroie, une fois appliquée en **B** sur la poulie, tourne avec elle et y est retenue par le frottement. La force qui agit suivant **CD** tend la courroie et lui donne cette direction à mesure qu'elle quitte la poulie, mais ne la fait pas glisser. Aussi est-ce sur la partie **AB** qu'on agit transversalement, quand on veut *désembrayer* la courroie, la retirer de la poulie en mouvement, comme nous le verrons, article 212.

Cela posé, le mécanisme représenté sous le n° 24 du tableau synoptique, par deux projections verticales et une horizontale, est facile à comprendre. Le mouvement a lieu dans le sens marqué par les flèches. La branche montante de la courroie, oblique sur le plan de la poulie inférieure qu'elle quitte, se meut dans le plan de la poulie supérieure vers laquelle elle se transporte; la branche descendante, oblique sur la poulie supérieure d'où elle vient, se meut dans le plan de la poulie inférieure où elle va. *Si l'on faisait tourner les poulies contrairement au sens indiqué, la courroie se désembrayerait spontanément.*

La figure 115 va nous servir à étudier d'une manière plus précise les conditions géométriques de cette disposition. On connaît les rayons des deux poulies, la distance h de leurs axes supposés horizontaux, et leur angle α. On prend pour plan horizontal de projection celui qui contient l'axe inférieur **KO'**, et, pour plan vertical de projection, un plan perpendiculaire à l'axe de la poulie supérieure. On trace à volonté la ligne de terre $x'x$, puis, par un point quelconque **M** du plan horizontal on mène l'axe **KO'** de l'arbre inférieur, faisant avec une perpendiculaire à la ligne de terre l'angle α. Prenant à volonté le centre **O'** de la poulie inférieure, on construit l'ellipse BCA_1 projection verticale de la circonférence de cette poulie. Il ne s'agit plus que de trouver sur l'horizontale NO_1, située à la distance h de $x'x$, le centre O_1 d'une circonférence dont le rayon est connu, et qui doit satisfaire à cette condition : que

AB et $\mathbf{DA_1}$ étant les deux tangentes communes à la circonférence et à l'ellipse, les deux points de contact **A** et $\mathbf{A_1}$ soient sur une même verticale qui sera la commune intersection des plans moyens des deux poulies ; de sorte que le point **A**, où la courroie quitte la poulie supérieure, est dans le plan de la poulie inférieure, et le point $\mathbf{A_1}$ où elle quitte cette dernière est dans le plan de l'autre. On résout graphiquement ce problème par tâtonnement, en essayant successivement quelques positions du centre $\mathbf{O_1}$ et construisant une courbe d'erreur qui coupe l'horizontale $\mathbf{NO_1}$ au point cherché.

Lorsque les axes des poulies sont suffisamment éloignés l'un de l'autre, comparativement à leurs rayons, les tangentes **AB**, $\mathbf{A_1D}$ sont à peu près perpendiculaires au plan parallèle aux deux axes, et par conséquent les distances $\mathbf{A'O'}$ et $\mathbf{A'O'_1}$ sont très-peu différentes des rayons.

4e GENRE. RAPPORT DES VITESSES VARIABLE. AXES PARALLÈLES.

174. Contact de deux cames. — Exemple : 25. *Spirale logarithmique.* Voir pour la théorie des cames les articles **124**, **125** et **136**.

175. Engrenages divers. — 26. *Engrenage elliptique.* — 27. *Engrenage dérivé de l'ellipse.* — 28. *Engrenage de quarrés arrondis.* Voir pour la théorie de ces mécanismes les articles **126** et **127**. — 29. *Engrenage de trois roues dentées ordinaires dont l'une est excentrée.* Ce mécanisme (indiqué en plus grand dans la figure **116**) comprend trois roues dentées de même pas. L'une, dont le centre de figure est **A**, tourne autour de l'axe **a** fixe et excentrique ; l'autre tourne autour de l'axe **B** fixe en son centre ; la troisième, intermédiaire, a son centre **C** assujetti à se mouvoir en restant à distance invariable des centres **A** et **B** des deux autres. Appelons $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ les rayons des trois roues, et soit r la distance **aA**, rayon de la circonfé-

rence que décrit le centre A. La distance constante des centres C et A est égale à $C+A$. La distance variable Ca, à cause du triangle CaA, est assujettie à deux conditions, savoir d'être inférieure ou tout au plus égale à $CA+r$, et supérieure ou tout au moins égale à $CA-r$. C'est pourquoi le point C, mobile sur un arc de cercle dont le rayon est $B+C$, oscille entre deux positions, savoir : C' dont la distance C'a au centre de rotation est $C+A+r$, et C'' dont la distance C''a au même point est $C+A-r$. Dans chacune de ces positions extrêmes le rapport des vitesses angulaires w_a et w_B des roues a et B est facile à calculer, parce que le centre C est sans vitesse, et est par conséquent le centre instantané de rotation de la roue intermédiaire. On a donc dans les deux cas extrêmes :

$$Bw_B=(A+r)\,w_a, \quad \text{et} \quad Bw_B=(A-r)\,w_a.$$

Le rapport des vitesses angulaires $\frac{w_B}{w_a}$ varie donc entre

$$\frac{A+r}{B} \quad \text{et} \quad \frac{A-r}{B},$$

de sorte que si l'on veut que w_a étant constante, w_B varie dans le rapport de n à 1, il faudra faire

$$\frac{A+r}{A-R}=n \quad \text{ou} \quad \frac{A}{r}=\frac{n+1}{n-1}.$$

30. *Cônes inverses de Roemer.* La figure donne l'idée d'un système de rouage proposé par le célèbre astronome danois Roemer (1644 à 1710) pour faire varier le rapport des vitesses angulaires de deux arbres. Les deux axes AA_1 et BB_1 sont parallèles. Autour du premier tourne un tronc de cône armé dans toute sa hauteur de côtes saillantes analogues aux dents des roues d'engrenages coniques. Autour du second tourne un

autre tronc de cône dont le sommet B_1 est opposé à celui du premier, et il est garni de chevilles qui successivement se logent dans les cannelures de celui-ci. Soient r et R les rayons primitifs des bases supérieures; r_1 et R_1 ceux des bases inférieures. Lorsque la cheville située dans la base supérieure engrène avec le cône cannelé, le rapport des vitesses angulaires autour de AA_1 et BB_1 est égal à $\frac{R}{r}$; lorsque c'est la cheville inférieure, ce rapport devient $\frac{R_1}{r_1}$. Les chevilles intermédiaires établissent la transition de l'une à l'autre de ces valeurs, et sont disposées suivant une courbe primitive qu'on déterminera par une construction graphique exécutée sur le développement des deux cônes primitifs.

Remarques. — I. Lorsque le mouvement du cône cannelé est uniforme, le mouvement du cône à chevilles est périodiquement uniforme, chaque période ayant la durée d'une révolution de cette dernière roue; si le nombre des cannelures et celui des chevilles sont premiers entre eux, la même cannelure est successivement en contact avec les diverses chevilles de la seconde roue. Cette propriété distingue essentiellement les roues dont il s'agit ici de celles qui sont indiquées à l'article 174.

II. Les deux axes de rotation pourraient n'être pas parallèles; il suffirait que les deux cônes primitifs fussent tangents suivant une génératrice commune et que, par conséquent, les axes fussent dans un même plan. L'un des cônes pourrait devenir un cylindre.

31. *Secteurs dentés engrenant alternativement.* Ce mécanisme est une application immédiate de ce qui est expliqué à l'article 126, V.

32. *Engrenage intermittent.* Voir sur ce sujet l'article 130, où les deux roues font simultanément un dixième de tour, après quoi l'une des roues s'arrête pendant que l'autre achève

d'accomplir un tour entier. Ajoutons seulement ici que si les deux roues devaient se mouvoir ensemble pendant une plus grande fraction du tour entier, il faudrait que la roue qui tourne continuellement portât plusieurs dents consécutives s'engrenant dans un même nombre d'intervalles creusés au pourtour de la roue intermittente. C'est ce qu'indiquent la figure 117 et le n° 32 du tableau synoptique, dans lesquels la roue intermittente C fait un quart de tour à chaque révolution complète de l'autre roue C'.

Les mécanismes intermittents ont en général un inconvénient : c'est celui du choc qui a lieu chaque fois que la pièce en mouvement continu recommence à agir sur l'autre pièce en repos, choc d'autant plus sensible que la vitesse du corps choquant, à l'endroit du contact, est considérable. La figure 117 montre un moyen d'atténuer cet effet nuisible; deux cames AB, A'B', sont fixées sur les faces latérales d'un même côté des roues C et C'; la came AB est en saillie sur la projection du contour de la roue intermittente C, l'autre came, A'B', est en dedans du contour de la roue C'. Ces deux cames sont disposées de manière à se toucher en B et B', à l'instant où la dent D' de la roue C', tournant dans le sens indiqué par la flèche, va bientôt atteindre la dent D de la roue intermittente. Ainsi au lieu d'un choc il y en a deux, mais beaucoup moindres. Nous démontrerons théoriquement ailleurs l'avantage de ces *chocs échelonnés*.

Dans la figure 117, les rayons CT, C'T, des cercles primitifs de l'engrenage sont égaux, mais cette condition n'est pas nécessaire.

176. Manivelles. — 33. *Deux manivelles, l'une à bouton, l'autre à coulisse.* Soient A et A' les axes de rotation projetés sur un plan qui leur est perpendiculaire. Soit leur distance $AA' = a$ (fig. 118), et soit r la distance constante du centre B du bouton de la manivelle AB à son axe A. En ap-

pelant α et α' les angles **BAC** et **BA'C** des deux manivelles avec le plan **AA'**, on a

$$\text{tang } \alpha' = \frac{r \sin \alpha}{r \cos \alpha - a}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\alpha'}{\cos^2 \alpha'} = \frac{r^2 - ar \cos \alpha}{(r \cos \alpha - a)^2} d\alpha .$$

$\frac{d\alpha}{d\alpha}$ est le rapport des vitesses angulaires w' et w, qui varie entre les deux valeurs qu'il prend quand les angles α et α' sont nuls, et quand ils sont égaux à 180°.

Les équations précédentes confirment, ce qu'on reconnaît immédiatement, qu'on a :
dans le premier cas,

$$w.r = w'(r - a),$$

et dans le second,

$$w.r = w'(r + a).$$

34. *Deux manivelles égales unies par une bielle.* Cette bielle est plus grande que la distance des deux axes de rotation. Le rapport des vitesses des deux manivelles est déterminé par la théorie du n° 55, déjà rappelée au n° 137.

177. Communication par un corps flexible. — 35. *Fusées.* Deux cônes, ou un cône et un cylindre cannelés en spirales sur lesquels s'enroule une corde ou une chaîne, servent à faire varier le rapport des vitesses angulaires de deux arbres parallèles, suivant une loi évidente.

36. *Deux poulies dont l'une est excentrique.* La théorie de ce mécanisme est expliquée aux n°s 146 et 148. Un poids dit *tendeur* sert à maintenir la tension de la corde sans fin.

37. *Pédale du tourneur.* Ce mécanisme imprime au cylindre sur lequel s'enroule la corde une vitesse angulaire à peu près proportionnelle à celle de la pédale où cette corde est attachée. Le ressort supérieur maintient la tension.

5e GENRE. RAPPORT DES VITESSES VARIABLE. AXES NON PARALLÈLES.

178. Communication par croisillon. — 38. *Joint brisé de Cardan.* Voir à ce sujet le n° 143. Lorsque l'angle des deux axes est trop grand pour qu'on puisse lier leurs rotations par un seul *joint,* ou bien encore lorsque les deux axes ne sont pas dans un même plan, on peut les lier par un arbre intermédiaire et par deux joints établis à ses intersections avec les deux arbres donnés.

179. Communication immédiate par engrenage.—39. *Roue dentée excentrique et long pignon.* Ce mécanisme, imaginé par Huyghens, est applicable au cas où les deux axes concourent et sont à angle droit. La roue, armée d'un grand nombre de dents, forme une sorte de couronne dont la base plane et circulaire tourne autour d'un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe en un point intérieur autre que le centre. Le pignon parallèle à cette base est assez long pour pouvoir engrener avec la roue dans ses diverses positions. Les dents du pignon étant cylindriques ne peuvent à chaque instant toucher celles de la roue qu'en un point. Aussi ce genre d'engrenage ne pourrait-il être convenablement employé que dans le cas où la pression mutuelle des dents serait faible et leur mouvement très-lent.

40. *Vis sans fin à inclinaison variable.* Si l'on modifie la vis sans fin en donnant à ses filets parallèles une inclinaison variable, il en résulte que tandis que la vis tourne uniformément autour de son axe, la roue avec laquelle elle engrène a une vitesse angulaire variable par périodes dont la durée est celle d'une révolution entière de la vis.

41. *Engrenage d'angle intermittent.* Le mécanisme décrit à l'article 174, n° 32, est applicable par analogie au cas où les deux axes de rotation, au lieu d'être parallèles, se rencontrent en un point. Les courbes de la figure 112 sont alors tracées sur une sphère dont le centre est au point de concours des axes,

et les surfaces de contact, cylindriques dans l'hypothèse de la figure 117, deviennent coniques, ayant pour sommet ce même point.

180. Communication par bielle. — 42. *Deux balanciers oscillant simultanément.* Ces deux corps, assujettis chacun à un axe de rotation, sont liés par une bielle. Si les deux axes étaient parallèles, les articulations de la bielle et des balanciers seraient simplement à charnière. S'ils ne sont pas parallèles, et si les articulations doivent être assujetties sans ballottement possible, il faut qu'elles soient à rotule ou à joint brisé. Mais si cette précision n'est pas nécessaire, l'assemblage s'obtient en terminant chaque balancier et la bielle par des anneaux circulaires qui s'engagent mutuellement l'un dans l'autre, disposition qui ne serait pas praticable pour un balancier qui devrait faire sa révolution entière. Du reste, les vitesses simultanées des deux articulations sont soumises à la règle de l'article 37, puisque ces deux points sont à une distance invariable.

43. *Renvois de sonnettes.* Ce mécanisme, très-simple, est analogue au précédent. Des fils métalliques faisant fonctions de bielles sont attachés aux bras des balanciers par de simples nœuds.

§ 2.

2e CLASSE. LIAISON DE DEUX MOUVEMENTS, L'UN CIRCULAIRE, L'AUTRE RECTILIGNE OU HÉLICOIDE, AVEC CHANGEMENTS DE SENS SIMULTANÉS.

1er GENRE. TRANSLATION PARALLÈLE AU PLAN DE LA ROTATION.

181. Communication immédiate. — 44. *Rouleau menant une tige.* Dans la figure la tige, étant horizontale, est maintenue et pressée contre le rouleau par son poids. Si elle était verticale, il faudrait un autre moyen de pression dont on verra plus loin un exemple.

45. *Roue dentée et crémaillère.* La forme des dents a été étudié à l'article 104. On voit dans la figure deux rouleaux qui empêchent la crémaillère de s'écarter de la roue. De plus, pour l'empêcher de se mouvoir parallèlement à l'axe de la roue, on guide ses deux extrémités, ou bien, si l'on n'en guide qu'une, on munit la roue de deux joues entre lesquelles glissent les dents de la crémaillère.

46. *Balancier à coulisse et tige guidée à bouton.* La figure suffit pour montrer en quoi consiste ce mécanisme fort simple. La relation variable de la vitesse linéaire de la tige et de la vitesse angulaire du balancier se calcule ainsi que la vitesse de glissement, comme l'explique l'article 82.

47. *Balancier à bouton et tige guidée à coulisse.* La ligne-milieu de la coulisse étant perpendiculaire à la translation de la tige, un point quelconque de celle-ci supposée verticale se meut comme la projection verticale du centre du bouton qui décrit un arc circulaire. Il est utile, pour diminuer l'usure, d'entourer le bouton d'un coulisseau rectangulaire, suivant une indication de l'article 131, page 174.

182. Communication par l'intermédiaire d'un corps flexible. — 48. *Treuil.* Ce mécanisme, très-simple, est bien connu. Sur l'arbre cylindrique et horizontal, mis en mouvement de rotation au moyen d'une manivelle ou d'une roue à cheville, s'enroule une corde qui s'y applique en hélice et dont la partie verticale pendante supporte un fardeau. Le mouvement d'un point de cette partie de la corde est rectiligne, mais non exactement vertical, puisque à chaque tour du treuil ce point s'élève d'une quantité égale à la longueur d'une spire de l'hélice tandis qu'il s'avance horizontalement d'un pas.

49. *Double treuil à gorges.* Dans le treuil ordinaire dont nous venons de parler, la corde ne peut avoir qu'une longueur limitée par celle du cylindre, à moins qu'elle ne s'y enroule par couches, ce qui fait varier le rapport des vitesses. On évite ces

deux conditions dans l'appareil indiqué par la figure 119 et le n° 49 du tableau synoptique. Les deux arbres **AA** et **A'A'** sont parallèles dans un plan que nous supposons horizontal, quoiqu'il puisse être quelconque. Ils tournent dans le même sens et avec une même vitesse, au moyen de deux roues dentées égales, calées sur ces arbres et engrenant avec un pignon intermédiaire fixé sur l'arbre **BB**. Aux extrémités des arbres **AA** et **A'A'** opposées aux roues sont deux rouleaux cannelés transversalement, offrant par conséquent la forme de deux systèmes de poulies égales, **C, D, E,**··· d'une part, **C', D', E',**··· de l'autre. Une corde **NN**···**MM** s'engage du côté de **MM** dans la poulie **C** où elle occupe un quart de circonférence, passe ensuite de cette poulie **C** à la poulie **C'** par-dessus; elle occupe sur **C'** une demi-circonférence, puis elle passe, par-dessous, de **C'** à la poulie **D**; elle revient par-dessus et passe à la poulie **D'**, d'où elle va par-dessous à la poulie **E'**, puis par-dessus à la poulie **E'**, où elle n'occupe, suivant la supposition de la figure, qu'un quart de circonférence, après quoi la corde descend du côté de **NN**. Comme on le verra plus tard dans le traité où il sera question du frottement, une faible tension de la corde en **NN** suffit pour empêcher la corde de glisser, quoique la tension en **MM** soit considérable. Il est évident que le mouvement uniforme de rotation de la manivelle et des arbres détermine le mouvement uniforme et rectiligne de la corde du côté **MM**, mouvement prolongé autant que le permet la longueur quelconque de cette corde.

50. *Treuil conique.* Dans ce cas, la vitesse de la manivelle et celle d'un point de la corde sont dans un rapport variable qu'on pourrait même assujettir à une loi donnée en remplaçant le tronc conique par une surface de révolution d'un profil convenable.

51. *Bobine.* La corde, ordinairement plate dans ce cas, s'enroule par couches successives les unes sur les autres, et le rapport des vitesses varie en conséquence.

52. *Treuil différentiel.* Il est formé de deux cylindres inégaux sur lesquels les deux parties extrêmes d'une même corde sont enroulées en sens contraire. La partie intermédiaire embrasse une poulie mobile dont la chape supporte un fardeau. R et r étant les deux rayons des cylindres, pour un déplacement angulaire α du treuil, la corde s'enroule d'un côté de αR et se déroule de l'autre de αr. La partie pendante de la corde diminue de $\alpha\,(R-r)$; et la poulie s'élève à peu près de $\frac{1}{2}\alpha\,(R-r)$, tandis que l'extrémité de la manivelle dont le bras est b décrit l'espace αb. Le rapport $\frac{R-r}{2b}$ des vitesses peut être rendu aussi petit qu'on veut (d'où l'on conclut en dynamique que le rapport de l'effort exercé sur la manivelle au poids du fardeau peut être aussi arbitrairement diminué).

L'inconvénient le plus palpable qui s'oppose à l'emploi pratique de ce mécanisme est la grande longueur de corde nécessaire, pour une médiocre élévation obtenue. Soient h cette hauteur et l la longueur de corde qui se déroule de dessus le petit cylindre. On a, d'après ce qui vient d'être dit,

$$h=\frac{1}{2}\alpha\,(R-r) \quad \text{et} \quad l=\alpha r, \quad \text{d'où} \quad l=\frac{2hr}{R-r};$$

il faut donc que la longueur totale de la corde soit plus grande que

$$\frac{2hr}{R-r}+2h \quad \text{ou} \quad \frac{2hR}{R-r}.$$

53. *Palan différentiel de Wilson.* Cet appareil de nouvelle invention a une grande analogie avec le treuil différentiel; il en diffère principalement en ce que la corde, au lieu d'être fixée par ses deux extrémités sur les cylindres inégaux, est une corde ou plutôt une chaîne sans fin. Les deux cylindres sont remplacés par deux poulies R et R′ calées sur un même arbre tournant,

et creusées chacune en gorge dans laquelle la chaîne s'engage sans pouvoir glisser longitudinalement. Les quatre parties verticales de la chaîne supportent deux poulies p et p' à l'une desquelles est suspendu un fardeau qu'il s'agit d'élever en imprimant un mouvement de rotation au système des deux poulies supérieures. La figure montre comment la chaîne sans fin est disposée. Un de ses points pris d'abord sur la partie A monte, passe sur la grande poulie R, descend suivant la droite B, parcourt le dessous de la poulie p', puis remonte suivant C vers la petite poulie R'; il en parcourt la demi-circonférence supérieure, puis il redescend vers la poulie chargée p sous laquelle il passe, après quoi il remonte suivant D vers la grande poulie supérieure R, et ainsi de suite. La somme des longueurs des quatre parties de la chaîne étant constante, il en résulte qu'autant la poulie p monte, autant la poulie p' descend. Il ne reste qu'à trouver la relation de la vitesse angulaire w de l'arbre supérieur ou de sa manivelle avec la vitesse linéaire v du centre de la poulie montante p. Or, pendant l'unité de temps, un point de la partie A de la chaîne s'élève de wR, tandis qu'un point de la partie D s'abaisse de wR'; donc l'ensemble de ces deux parties s'est raccourci de $wR - wR'$, et par conséquent la poulie p s'est relevée de la moitié de cette quantité. On a donc

$$v = \frac{w\,(R - R')}{2},$$

d'où il suit que dans cet appareil, comme dans le treuil différentiel, le rapport de la vitesse wb de la manivelle à la vitesse v de la poulie ascendante est

$$\frac{R - R'}{2b}.$$

54. *Tambour ou secteur lié à une tige tangente, par des chaînes*

ou des lanières. Le tambour ou secteur est mis en mouvement par une manivelle ou par un balancier plus ou moins long.

55. *Tambour ou secteur et corde passant sur deux poulies de renvoi.* A la corde est attaché un corps dont le mouvement alternatif est guidé.

56. *Archet et foret.* Ce mécanisme, bien connu dans les ateliers, s'explique par la figure.

183. Communication par l'intermédiaire d'un corps solide. — 57. *Balancier, bielle et tige guidée.* Le rapport des vitesses du balancier et de la tige se détermine par les considérations de l'article 56.

58. *Balancier à support oscillant et tige guidée.* Le balancier est immédiatement articulé, d'une part, en **A** à la tige assujettie à un mouvement rectiligne; d'autre part, en **B**, au support oscillant autour d'un axe fixe **C**. A chaque instant le centre instantané de rotation du balancier est à la rencontre de la droite **CB** et de la perpendiculaire en **A** à la direction de la tige.

59. *Balancier à bride.* — 60. *Parallélogramme articulé de Watt.* La théorie de ces mécanismes est étudiée aux articles 138 et 139.

61. *Zigzag.* Ce mécanisme se compose d'une suite de losanges articulés dont le premier a son sommet fixe en **C**, et le dernier a son sommet **A** sur une tige guidée **AB**. En appelant n nombre des losanges, a la longueur de leurs côtés, α l'angle variable de ces côtés avec la direction de la tige, x la distance de l'axe de rotation fixe **C** au dernier sommet **A**, on a

$$x = 2na\cos\alpha, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dt} = 2na\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt},$$

relation de la vitesse linéaire de la tige et de la vitesse angulaire des leviers disposés en prolongement de deux côtés du premier losange.

2e GENRE. TRANSLATION PARALLÈLE A L'AXE DE LA ROTATION.

184. Communication immédiate. — 62. *Cylindre à rainure et bouton glissant.* Dans le cylindre est creusée une rainure de largeur constante, où pénètre une cheville cylindrique dont le diamètre est presque égal à cette largeur. La cheville liée à un corps solide guidé ne peut se mouvoir que parallèlement à l'axe du cylindre. Celui-ci, en tournant, détermine la translation rectiligne de la cheville, suivant une loi qui dépend de l'inclinaison de la rainure sur les génératrices qu'elle traverse.

63. *Vis sans fin et crémaillère.* — 64. *Vis tournant simplement et écrou guidé en translation.* Ces deux cas ont une analogie évidente avec le précédent. Dans l'exemple 62 la vis est assujettie par un collier A à ne se mouvoir que circulairement et non longitudinalement ; l'écrou guidé ne peut tourner.

65. *Tracé mécanique d'une hélice.* La fonction de ce mécanisme est, pour ainsi dire, réciproque de celle du numéro 62. Le cylindre sur lequel il s'agit de tracer l'hélice est mis en mouvement de rotation à l'aide d'une manivelle ou autrement. Ce mouvement, au moyen d'un engrenage, détermine la rotation, sans translation, d'une vis dont l'axe est parallèle à celui du cylindre. La vis fait mouvoir en translation un écrou guidé qui porte une pointe traçante en contact avec le cylindre. Cette pointe décrit sur le cylindre une hélice dont le pas est à celui de la vis dans le rapport inverse des vitesses angulaires du cylindre et de la vis, ou dans le rapport direct des diamètres primitifs des deux roues dentées.

66. *Foret à vis.* Une tige verticale en forme de vis à filets fortement inclinés porte à une extrémité un outil à percer les métaux, dit *foret;* à l'autre extrémité est un pivot engagé dans une sorte de pomme de canne qu'un ouvrier tient à peu près immobile d'une main, tandis que de l'autre il saisit un long écrou que la vis traverse et qu'il fait mouvoir alternativement de

haut en bas et de bas en haut; d'où il résulte que la vis et le foret tournent horizontalement et alternativement dans les deux sens. Ce cas est géométriquement analogue aux précédents; la différence est qu'ici c'est l'écrou qui fait mouvoir la vis.

67. *Ecrou tournant simplement et vis en translation.* A chaque tour de l'écrou, la vis s'avance d'un pas des filets, quel que soit leur nombre.

68. *Deux vis inverses.* Ces deux vis en prolongement l'une de l'autre ont leurs filets de sens contraires; elles s'engagent dans deux écrous qui, ne pouvant tourner, se rapprochent ou s'éloignent suivant qu'on donne à la vis *à droite* la rotation directe ou la rotation rétrograde.

69. *Vis tournant dans un écrou fixe.* Dans ce cas la vis n'a plus un mouvement simple de rotation, mais un mouvement héliçoïde composé de translation et de rotation. La presse à vis et la presse à timbrer offrent des exemples vulgaires de cet emploi de la vis.

Si la vis doit recevoir son mouvement héliçoïde d'un engrenage ou d'une courroie, il faut que la roue dentée ou la poulie qui tourne autour du même axe géométrique que la vis ait un mouvement de rotation, c'est-à-dire ne se déplace pas suivant l'axe. On obtient ce résultat par la disposition qu'indique le numéro 69 du tableau. La roue ou poulie est liée à une gorge tournant dans un palier fixe. L'arbre qui traverse la roue tourne forcément avec elle, mais peut y glisser longitudinalement, ces deux pièces n'étant assemblées qu'à frottement doux, avec rainure et languette. Ce même arbre a une portion filetée, c'est-à-dire taillée en vis, qui, lorsqu'elle tourne, s'avance ou recule dans l'écrou fixe où elle est engagée.

70. *Vis différentielle.* Deux vis de pas différents sur un même arbre tournent dans deux écrous, l'un immobile **A**, l'autre guidé **B** et ne pouvant avoir qu'un mouvement de translation. A chaque tour de l'arbre, celui-ci s'avance d'un pas de l'écrou immobile et de sa vis; mais si les deux vis sont de même sens,

l'écrou mobile recule, sur l'arbre, d'un pas de sa vis; donc il ne s'éloigne de l'autre écrou que d'une quantité égale à l'excès du premier pas sur le second. Si, par exemple, la différence des pas est de 1/10e de millimètre, la vis tournant de 2°, angle facile à mesurer sur un limbe gradué, fera théoriquement marcher l'écrou mobile de 1/1800e de millimètre. Mais ce mécanisme n'a pas l'utilité pratique qn'on pourrait lui attribuer, parce que la précision des mouvements est altérée par le *jeu* inévitable des vis dans leurs écrous, et de l'écrou mobile entre ses guides.

185. Communication par engrenages intermédiaires. — 71. *Machine à aléser.* Un arbre cylindrique creux AAA'A' tourne sans translation sur les deux paliers fixes B, B', reposant sur deux poupées CB, C'B'. Il reçoit son mouvement par une roue DD calée à l'une de ses extrémités; il entraîne dans sa rotation la roue EE calée aussi sur lui, vers l'autre extrémité, mais dans l'intervalle des poupées. A l'intérieur de cet arbre creux est un arbre plein cylindrique FF', portant une longue vis à filets quarrés dans l'espace compris entre la roue EE et la poupée C'B'; et à son extrémité F, en dehors de l'intervalle des poupées, est calée une roue HH, dont le mouvement est lié à celui de la roue EE au moyen des roues dentées I et K calées sur le petit arbre LL tournant sur deux paliers fixés à la poupée C.

Sur la vis de l'arbre FF' se meut un écrou M faisant corps solide avec le *porte-outil* NN, auquel se trouve fixé le ciseau qui rabote ou alèse la paroi intérieure du cylindre immobile OO. L'écrou M, intérieur à l'arbre creux, et l'anneau extérieur qui entoure ce même arbre et sert de base aux branches N, N, du porte-outil, sont liés entre eux par une languette qui glisse dans une rainure PP, ouverture longitudinale pratiquée dans l'arbre creux. Il en résulte que le porte-outil possède un mouvement composé d'une translation le long de la rainure (translation déterminée par la rotation de la vis relativement à l'arbre

creux), et d'une rotation égale à celle de l'arbre creux qui l'entraîne.

Comme il importe que l'outil aléseur ait une translation très-lente comparativement à sa vitesse rotatoire dans le cylindre OO, les engrenages des roues E, K, I et H, sont calculés de manière que la vitesse angulaire de la vis soit très-petite comparativement à celle de l'arbre creux. Si les quatre roues avaient un même nombre de dents, les deux extrêmes E et H auraient la même vitesse angulaire, dans le même sens; la vis et son écrou seraient en repos relatif dans l'arbre creux; par conséquent le porte-outil serait comme fixé sur cet arbre; il tournerait sans avancer. Pour obtenir une marche longitudinale très-lente, on fait en sorte que la vitesse angulaire de l'écrou et par conséquent de la roue E excède un peu celle de la vis et par conséquent de la roue H, ce qu'on réalise en donnant à la roue E moins de dents qu'à la roue H, tandis que les roues I et K en ont un même nombre d'ailleurs quelconque. Soient E et H les nombres de dents respectifs des roues E et H. Pendant que les roues D et E font H révolutions, le nombre de dents qui passe au contact des roues E et K, et par conséquent aussi au contact des roues I et H, est égal à HE; d'où il suit que la roue H fait E révolutions. Ainsi la vis, liée à la roue H, fait E révolutions pendant que l'écrou, comme l'arbre creux, en fait H; donc l'écrou, relativement à la vis, fait $H-E$ tours pendant que les roues D et E et l'outil en font H. Or, à chaque tour qu'il fait relativement à la vis, l'écrou s'avance d'un pas de cette vis, ainsi que l'outil qu'il entraîne; donc pendant que la roue D, l'arbre creux et l'outil font H révolutions, l'outil avance de $H-E$ pas, ou bien, le pas étant désigné par p, à chaque tour de la roue D et de l'outil, celui-ci avance de $\frac{H-E}{H}p$.

Exemple : $H=40$, $E=39$, $p=0^m,01$. A chaque tour de la roue D et de l'outil, celui-ci avance de $0^m,00025$.

Remarque. — Les deux roues presque égales H et E pour-

raient être situées l'une près de l'autre, en dehors de l'intervalle des poupées, et les deux roues I et K confondues en une seule. On sait en effet que, dans le système des profils de dents en développantes de cercle, des roues différentes peuvent engrener avec une même roue, et que la distance des centres, pour deux roues données de cette espèce, est arbitraire entre certaines limites; par conséquent elle peut rester la même, quoique le nombre de dents varie quelque peu.

§ 3.

3e CLASSE. LIAISON DE DEUX MOUVEMENTS RECTILIGNES.

186. Communication immédiate. — 72. *Plan incliné en translation conduisant une tige guidée*, ou *deux tiges guidées, l'une à coulisse, l'autre à bouton.* Ces mécanismes, qui, au point de vue géométrique, ne diffèrent pas, offrent des applications faciles de la théorie de l'article 83.

187. Communication par l'intermédiaire d'un corps solide. — 73. *Deux tiges guidées, unies par une bielle.* C'est un cas particulier du numéro 55. Si les axes des deux tiges sont dans un même plan, le centre instantané de rotation de la bielle est à l'intersection O des droites AO et A'O menées par les centres d'articulation A et A' perpendiculairement aux directions des tiges. Donc, en désignant par v et v' les vitesses des tiges, on a

$$\frac{v}{AO} = \frac{v'}{A'O} \quad \text{ou} \quad v \sin\alpha = v' \sin\alpha'.$$

Cette dernière relation résulte immédiatement de l'article 37, et subsiste même dans le cas où les articulations, étant à rotule ou à joint brisé, ne se meuvent pas dans un même plan.

188. Communication par corde et poulies simples. — 74 **a**. *Poulie fixe.* On appelle ainsi une poulie dont l'axe géométrique de rotation est fixe. Les deux portions rectilignes de la corde, courroie ou chaîne qui enveloppe partiellement la poulie ont la même vitesse ; l'une d'elles doit avoir son axe ou ligne moyenne dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la poulie ; mais l'autre peut s'en écarter sensiblement (172), pourvu que la poulie tourne dans un sens déterminé. — 74 **b**. *Deux poulies fixes ou de renvoi.* La corde ou courroie a trois parties rectilignes dont la seconde, intermédiaire, rencontre les directions des deux autres prolongées. Pour que le mouvement soit possible dans les deux sens, chaque poulie a son axe de rotation perpendiculaire au plan des deux directions qui lui sont tangentes. — 75. *Poulie mobile et poulie fixe de renvoi.* Si les deux portions rectilignes de la corde, tangentes à la poulie mobile **a**, l'une en repos, l'autre en mouvement, sont parallèles, ce qui est le cas ordinaire, un point de la portion mobile et de son prolongement au delà de la poulie de renvoi **b** a une vitesse double de l'axe et de la chape de la poulie **a** qui se meuvent en ligne droite. En effet la poulie mobile roule sans glissement sur la portion immobile de la corde, et par conséquent sa circonférence a une vitesse double de celle de son centre.

189. Communication par une corde et un palan. — On appelle une *moufle* un assemblage de plusieurs poulies, tournant dans une même chape, tantôt autour d'un même arbre, tantôt autour de divers axes parallèles situés dans un même plan. Deux moufles liées par une même corde allant alternativement de l'une à l'autre forment *un palan*. La chape d'une des moufles s'attache à un point fixe, l'autre chape est mobile et supporte une certaine charge. L'une des extrémités de la corde s'attache à la chape d'une des deux moufles. Chaque portion rectiligne de la corde entre les deux moufles s'appelle un *courant*. Tous les courants sont très-approximativement parallèles entre eux.

La dernière portion de la corde, celle qui quitte une des moufles sans aller passer sur une poulie de l'autre, s'appelle le *garant*. En général la vitesse des deux courants consécutifs qui aboutissent à une même poulie fixe ont même vitesse en deux sens contraires, tandis que des vitesses en sens contraires des deux courants qui aboutissent à une poulie mobile, l'une est en valeur absolue plus grande que l'autre d'une quantité égale au double de la vitesse de la chape; c'est ce qui résulte de ce que les deux points de contact diamétralement opposés des garants et de la poulie, étant considérés dans leur mouvement relatif à la chape et à l'axe de cette poulie, ont des vitesses égales et de sens opposés.

Il y a lieu de distinguer les deux cas ci-après indiqués; nous supposons, pour faciliter l'explication, que les courants sont verticaux ainsi que le garant, et que la moufle mobile monte avec une vitesse v.

76. *Palan dont les deux moufles ont le même nombre n de poulies.* Dans ce cas le premier courant peut être attaché à la chape de l'une ou de l'autre des deux moufles. S'il est attaché à la moufle fixe, 76 **a**, le premier courant est immobile et le garant descend avec une vitesse égale à $2nv$; s'il est attaché à la moufle mobile, 76 **b**, le premier courant a la vitesse v et le garant monte avec une vitesse $(2n+1)v$.

77. *Palan dont une moufle a une poulie de plus que l'autre.* Dans ce cas le premier courant doit être attaché à la chape de la moufle qui a le moins de poulies. S'il est attaché à la moufle fixe, 77 **a**, le premier garant est immobile et le garant monte avec une vitesse $(2n+2)v$, le nombre total des poulies étant $2n+1$. S'il est attaché à la moufle mobile, de n poulies, 77 **b**, le premier courant a la vitesse v, et le garant descend avec une vitesse égale à $(2n+1)v$.

190. Palans conjugués. — Nous appelons ainsi deux palans dont les mouvements sont liés entre eux comme on le voit aux

numéros 78 et 79 du tableau synoptique. Ces assemblages sont de deux espèces.

78. *Palans conjugués liant deux vitesses dont le rapport est le produit de deux nombres entiers.* Le garant du palan **a** est attaché à la moufle mobile du palan **b**. Supposé que le palan **a** ait 4 poulies et que le palan **b** en ait 5, si la moufle du premier a la vitesse v, son garant a la vitesse $4v$ et par suite le garant du palan **b**, dont le mouvement est 5 fois plus rapide, a la vitesse $20\,v$.

79. *Palans conjugués liant deux vitesses en rapport fractionnaire.* Les chapes des deux moufles mobiles sont liées par une corde distincte qui, dans la figure, passe dans une poulie de renvoi. Supposé que le palan **a** ait 5 poulies et que le palan **b** en ait 4, si la vitesse de la corde de communication est v, la vitesse du garant du palan **a** est $5v$ et celle du garant du palan **b** est $4v$; le rapport des vitesses des deux garants est donc 4/5.

191. Communication par des chaînes. — 80. *Balancier à deux secteurs et deux tiges.* C'est un double emploi de la liaison indiquée à l'article 189, n° 51. Les vitesses des deux tiges sont dans le rapport des rayons des secteurs qu'elles touchent.

192. Transmission de mouvement par un liquide. — 81. *Deux pistons et un tuyau de communication.* Le liquide étant incompressible et ne pouvant fuir entre les pistons et les cylindres où ils se meuvent, le rapport des vitesses des pistons est inverse de celui des aires de leurs sections droites. La *garniture* qui s'oppose à la fuite du liquide peut être adhérente au piston mobile, ou au cylindre fixe. Dans ce dernier cas le piston est dit *plongeur;* c'est un cylindre convexe dont la longueur excède celle de l'espace qu'il doit parcourir.

§ 4.

4e CLASSE. LIAISON DE DEUX MOUVEMENTS CIRCULAIRES L'UN PROGRESSIF, L'AUTRE ALTERNATIF.

1er GENRE. AXES PARALLÈLES.

193. Communication immédiate. — 82. *Balancier appuyé sur un excentrique à révolution entière.* — 83. *Balancier à bouton qui circule dans une rainure à révolution entière.* — 84. *Manivelle à révolution entière dont le bouton se meut dans une coulisse oscillante.* Le rapport des vitesses angulaires se trouve dans les trois cas, d'après la théorie de l'article 80, p. 89. Dans le troisième, le bouton de la manivelle a dans la coulisse du balancier oscillant un mouvement relatif, rectiligne et oscillatoire, dont il peut être utile de connaître la loi. Soient a la distance des deux centre de rotation C et C′, b le bras CB de la manivelle, x la distance variable BC′ du bouton à l'axe C′ de rotation de la coulisse, α l'angle variable C′CB de la manivelle et de la droite des centres de rotation. On a

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \quad \text{d'où} \quad x\frac{dx}{dt} = ab\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt},$$

relation entre la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du bouton dans la coulisse, et la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ de la manivelle.

Dans la machine à vapeur à cylindre oscillant de Cavé, le cylindre oscille avec la coulisse, et le piston participe au mouvement alternatif du bouton dans la coulisse.

85. a *martinet,* b *marteau frontal.* Les dents qui font lever le marteau s'appellent des cames. Le rapport des vitesses angulaires du marteau et de l'arbre à cames résulte encore de la

théorie de l'article 80. Ce qui distingue ces mécanismes des précédents, c'est que la came *échappe* et laisse retomber le marteau par l'action de la pesanteur.

194. Communication par bielle ou par emeliquetage. — 86. *Manivelle, bielle et pédale.* — 87. *Manivelle, bielle et balancier.* — 88. *Excentrique circulaire et balancier.* Dans ces trois mécanismes la manivelle ou l'excentrique qui la représente tourne à révolutions entières dans l'un ou l'autre sens, à la volonté du conducteur de la machine. Cette disposition est fréquemment employée, notamment dans les machines à vapeur à balancier. La théorie de l'article 55 s'applique ici. Les deux positions extrêmes du balancier, où sa vitesse est nulle et sur le point de changer de sens s'appellent *points morts* du balancier et répondent aux deux cas où les deux articulations de la bielle et le centre de la manivelle sont en ligne droite. Les deux points où passe dans ces situations le centre du bouton de la manivelle s'appellent *points-morts* de la manivelle.

89. *Manivelle, bielle et balancier intermittent avec choc.* Autour de l'axe géométrique **A** (fig. 120) tourne un arbre auquel est lié invariablement le balancier **AB**. Sur le même arbre est articulé à frottement doux un balancier auxiliaire **AD**, qui peut par conséquent se mouvoir en laissant le premier en repos. Ce second balancier porte une coulisse **BC** dans laquelle est engagé sans frottement un bouton **B** faisant partie du balancier principal **AB**. De plus le balancier auxiliaire **AD** est lié par une bielle **DE** à une manivelle **OE** qui tourne à révolution entière autour de **O**. Dans la position indiquée par la figure le balancier **AD** mené par la bielle vient d'achever son oscillation de droite à gauche et il a entraîné de ce côté le balancier **AB**. Maintenant supposons que le balancier **AB** ne puisse pas, par la seule action de la pesanteur, se mouvoir vers sa position verticale (condition qui peut se réaliser soit parce que le système solide dont ce balancier fait partie a son centre de gravité dans

l'axe A, soit par des frottements qui font que ce système reste dans toute position où il est laissé sans vitesse). Cela étant, pendant que le balancier AD recommencera son oscillation de gauche à droite, le bouton B, libre dans la coulisse, restera immobile, jusqu'à ce que l'extrémité C de cette coulisse vienne l'atteindre, ce qui arrivera lorsque les articulations de la bielle auront pris les positions D′ et E′ faciles à déterminer. A partir de cet instant le bouton sera entraîné à droite par la coulisse et s'arrêtera en C″ lorsque les articulations de la bielle seront en D″ et E″. Il y restera jusqu'à ce que l'extrémité de droite de la coulisse vienne le reprendre, ce qui aura lieu quand les articulations de la bielle seront en D‴ et E‴; après quoi le balancier auxiliaire, revenant à la position AD, ramènera le bouton en B. Ainsi le balancier principal s'arrête dans la position AB pendant que le bouton de la manivelle parcourt l'arc EE′; il oscille à droite pendant le parcours de l'arc E′E″; il s'arrête en AC″ pendant que l'articulation de la manivelle va de E″ en E‴; il oscille à gauche pendant le parcours de l'arc E‴E.

Ce mécanisme a l'inconvénient du choc que la coulisse opère sur le bouton B au commencement de chaque oscillation du balancier principal, mais qui devient peu considérable lorsque la manivelle ne tourne pas trop rapidement. (On va voir, n° 91, un balancier intermittent sans choc.) La coulisse circulaire du balancier auxiliaire a d'ailleurs l'avantage de n'exercer aucun frottement sur le bouton pendant les temps d'arrêt du balancier principal.

90. *Manivelle et balancier à quadruple oscillation par tour.* Le bouton d'une manivelle décrit la circonférence ABCb, fig. 121, autour de O; il est lié par une bielle BB′ à un balancier O′B′ qui oscille autour de O′; une autre bielle B_1B'' lie ce balancier à un second balancier O″B″ qui oscille autour de O″. Or il résulte des dispositions de la figure que, tandis que le bouton B de la manivelle fait un tour entier, l'articulation B′ du premier balancier décrit deux fois l'arc A′C′, en allant à gauche puis en

revenant à droite, et, dans la même période, l'articulation B'' du second balancier décrit quatre fois l'arc $A''E''$, en descendant et remontant alternativement.

Pour simplifier la figure, sur le prolongement du diamètre AC on a pris les distances AA' et CC' égales à la longueur BB' de la première bielle, et le centre O' à égale distance de A' et de C'; ainsi A et C sont les points morts de la manivelle; puis on a fait $O'A_1 = O'C_1$; ensuite sur la bissectrice $O'E_1$ de l'arc $A_1E_1C_1$ on a pris les points A'' et E'', de manière que les distances A_1A'' et E_1E'' sont égales à la longueur B_1B'' de la seconde bielle; enfin on a fixé le point O'' à égale distance de A'' et de E'.

On remarquera qu'en supposant la rotation de la manivelle uniforme, les deux oscillations successives du premier balancier, bien que d'égales durées, ne se font pas tout à fait avec les mêmes vitesses prises en ordre inverse, parce que si BB' et bB sont les deux positions de la bielle aboutissant au même point B, les deux arcs AB et Ab ne sont pas exactement égaux. Quant aux oscillations du second balancier, les deux premières ont ensemble la même durée que les deux suivantes; mais elles sont un peu inégales entre elles.

91. *Manivelle et balancier intermittent sans choc.* Ce mécanisme consiste, comme le précédent, en un balancier intermédiaire $O'B'$ lié d'une part à une manivelle OB par une bielle $B'B$, et d'autre part à un second balancier $O''B''$ par une bielle B_1B''. La différence de la disposition indiquée par la figure 122 et de la précédente, c'est que la droite $O'E'$ (dont le prolongement contient la corde $A''E''$ de l'arc décrit alternativement par l'articulation de la seconde bielle B_1B'' et du second balancier), divise l'angle $A'O'C'$ en deux parties inégales, dont l'une est assez petite pour que l'arc C_1E_1 diffère peu d'une droite perpendiculaire à $O'E_1$, et soit d'une petite longueur comparativement à la seconde bielle B_1B''. Il en résulte que, si l'on fait $E_1D_1 = C_1E_1$, pendant que l'une des articulations de la seconde bielle parcourt

alternativement dans les deux sens l'arc D_1C_1, l'autre reste sensiblement immobile en E″. Ainsi l'on voit que si, sur la circonférence décrite par le bouton de la manivelle, on détermine les points d et D de manière que les distances D′d et d′D soient égales à la longueur BB′ de la première bielle, l'articulation du deuxième balancier parcourt l'arc de E″ en A″ pendant que le bouton va de d en A, puis immédiatement elle revient de A″ en E″ pendant le parcours de l'arc AD, après quoi elle reste sensiblement stationnaire pendant que le bouton va de D en d en passant par C; et ces diverses alternatives de mouvement et d'arrêt s'opèrent sans choc.

92. *Levier de Lagarousse.* Ce mécanisme est susceptible de deux dispositions a et b. Dans les deux cas, le levier oscille autour d'un axe fixe et est lié par articulations à deux pièces légèrement courbes, dites *cliquets* ou *rochets*, dont les deux extrémités s'engagent entre les dents d'une roue dite *roue à rochet*, dents d'une forme particulière qu'indique la figure. Lorsque l'extrémité de droite du levier tourne en montant, le cliquet supérieur oblige la roue de tourner dans le même sens, tandis que le cliquet inférieur est successivement repoussé par une dent sur laquelle il s'appuie, puis obligé par son poids ou par un ressort de s'engager avec bruit dans le cran suivant. Lorsque ensuite le moteur rabaisse le levier, c'est le cliquet inférieur qui force la roue à rochet de tourner, toujours dans le même sens que d'abord, tandis que le cliquet supérieur glisse et saute d'un ou de plusieurs crans. Dans la figure 92a les cliquets agissent sur la roue en la poussant. Dans la figure 92b, ils agissent en tirant. Quant à la théorie de cette transmission de mouvement, on voit que les cliquets fonctionnent comme des bielles dont une articulation se déplace par intermittence sur la roue.

93. *Levier à encliquetage intermittent.* Ce mécanisme diffère du précédent en ce que la roue à rochet ne tourne que pendant l'une des deux oscillations alternatives du levier. Dans l'exem-

ple indiqué par la figure 93, le levier est terminé par un anneau ou bague tournant librement, à frottement doux, autour d'un cylindre qu'il embrasse. Ce cylindre repose par deux tourillons sur deux paliers fixes, et le levier, en oscillant, doit le faire tourner toujours dans le même sens pour élever un fardeau attaché à l'extrémité d'une corde qui s'y enroule. A cet effet, on a fixé, sur le cylindre et contre l'anneau, une roue à rochet dans les crans de laquelle s'engagent deux cliquets : l'un moteur, dont l'axe de rotation est fixé sur le levier mobile ; l'autre, dit cliquet d'arrêt, dont l'axe de rotation est immobile sur le bâti de la machine. Quand on abaisse le levier **a**, le cliquet moteur, qu'un ressort maintient entre les dents de la roue à rochet, appuie sur cette roue et la fait tourner ainsi que le cylindre qui élève le fardeau, tandis que le cliquet d'arrêt saute d'une ou de plusieurs dents. Quand ensuite on soulève le levier, la roue à rochet empêchée par le cliquet d'arrêt ne peut se détourner, pendant que le cliquet moteur remonte d'un ou de plusieurs crans sur la roue. Il résulte de là que pendant l'ascension du levier l'effort des ouvriers est employé à le soulever, et que pendant sa descente leur effort agissant en sens contraire concourt avec le poids du levier pour élever le fardeau.

Si, comme le suppose la description précédente, le cylindre n'est armé que d'une roue à rochet et d'un levier, le cylindre ne tourne et le fardeau ne monte que pendant que le levier descend. Pour éviter les temps d'arrêt, on adapte au cylindre deux roues à rochet et deux leviers pareils, dont l'un descend pendant que l'autre monte.

Remarque. — Il n'y a aucune nécessité que le levier portant le cliquet moteur oscille autour de l'axe géométrique de la roue à rochet. On emploie dans les scieries la dispositon indiquée en lignes pointillées : quand le levier **b** se lève, la roue à rochet tourne dans le même sens ; quand il s'abaisse, elle reste stationnaire.

94. *Encliquetage Dobo.* Un arbre dont l'axe est **OO** (fig. 123), ne peut, à cause d'un frottement ou d'une résistance analogue, tourner autour de cet axe, si ce n'est moyennant une ou plusieurs forces ***P*** d'une intensité suffisante. Sur cet arbre est calé à demeure un disque cylindrique **ABC** entouré d'un anneau **DDEE** assemblé avec lui à languette et à frottement doux. C'est sur cet anneau qu'agissent, au moyen de leviers, les forces ***P*** qui doivent faire tourner le disque **ABC** et son arbre, dans le sens de la flèche. Mais on veut, de plus, que lorsque les forces ***P*** changent de sens, l'anneau tourne en sens contraire de la flèche sans entraîner l'arbre. On satisferait à cette condition par une roue à rochet fixée sur le disque et un cliquet adhérent à l'anneau; mais les oscillations des leviers devraient correspondre à un nombre entier de dents de la roue. L'encliquetage Dobo n'est pas soumis à cette restriction. Dans le creux cylindrique **HIKL** compris entre la paroi intérieure d'une partie de l'anneau et la face plane **IL** du disque sont établies quatre pièces, dont chacune, telle que **abc**, pouvant tourner sur le plan **IL** autour d'une goupille **c** solidement fixée dans le disque **AB**, est en contact avec l'intérieur de l'anneau par une surface cylindrique **adb** dont le rayon est tant soit peu moindre que celui de l'anneau. Un petit ressort **e** presse faiblement cette sorte de secteur dans le sens de **adb**, et la goupille **c** est située hors de la normale **dO** commune aux deux surfaces, de manière que l'angle **Odc** ait au plus 9 degrés. La théorie du frottement, exposée dans un autre traité, démontre que l'angle **Odc** étant moindre que l'*angle de frottement* des matières en contact, il en résulte que le mouvement de l'anneau dans le sens de la flèche est impossible sans entraîner celui du disque et de l'arbre, et qu'au contraire, dans le sens opposé à celui de la flèche, un faible effort suffit pour faire tourner l'anneau autour du disque resté fixe.

95. *Balancier et double crémaillère guidée.* Ce mécanisme, qui a une grande analogie avec le levier de Lagarousse, établit une

liaison entre le mouvement circulaire alternatif du balancier et le mouvement rectiligne progressif de la crémaillère (ce mouvement rectiligne est considéré ici comme un cas particulier du mouvement circulaire).

195. Communication par engrenage. — 96. *Bielle à roue dentée circulante*, dite *roue planétaire de Watt*. La roue, dont le centre C est à l'extrémité inférieure de la bielle, est fixée invariablement sur cette pièce et ne se meut par conséquent qu'avec elle. Le point géométrique C, centre de cette roue, tourne autour de l'axe fixe C′ de la seconde roue dentée avec laquelle elle engrène et qu'elle entraîne dans son mouvement. Cette seconde roue est calée sur un arbre tournant qui porte un volant destiné, comme on le verra en dynamique, à régulariser la rotation. L'invariabilité de distance entre les deux centres des roues dentées est établie par une verge rigide CC′ articulée à ses deux extrémités et tournant autour de l'axe du volant, mais avec une vitesse angulaire différente.

Soit w cette vitesse angulaire et soit $CC' = a$, de sorte que la vitesse linéaire du centre C est wa. Soit w' la vitesse angulaire du volant qui est aussi celle de la seconde roue. Pour simplifier l'expression du rapport de ces deux vitesses angulaires w et w', supposons que la bielle soit assez longue comparativement au lien CC′ pour qu'elle puisse être considérée comme se mouvant parallèlement à elle-même, de sorte que tous ses points et ceux de la roue qu'elle porte à son extrémité ont une vitesse linéaire égale à wa. Cette vitesse est donc celle du point de contact des deux roues dentées. Donc si l'on appelle r' le rayon de la seconde roue, on a

$$wa = w'r'$$

relation cherchée. Watt, qui dans ses premières machines à vapeur a employé cette disposition, faisait $a = 2r'$, de manière qu'il obtenait une vitesse angulaire double de celle qu'a le vo-

lant quand on supprime, comme aujourd'hui, les deux roues dentées et qu'on remplace le lien CC′ par une manivelle fixée invariablement sur l'arbre central. Le volant faisait deux révolutions à chaque double oscillation du balancier; mais on a renoncé, et Watt le premier, à ce mécanisme, qui offre peu de solidité.

97. *Roue partiellement dentée et pignon alternativement extérieur et intérieur.* Par cet ingénieux mécanisme employé dans les métiers de filature, un pignon tournant toujours dans un même sens imprime à une roue, dentée sur une partie seulement de la circonférence, un mouvement circulaire alternatif. L'arbre du pignon repose sur deux supports qui lui permettent de petites oscillations dans un plan horizontal passant par le centre de la roue : à cet effet, l'un des supports consiste dans un coussinet à pivot, l'autre est une coulisse horizontale. Le pignon peut ainsi passer de l'extérieur à l'intérieur de la denture de la roue sans cesser d'engrener, son écartement étant empêché soit par la coulisse du support voisin et par un butoir fixé sur la roue, soit par une rainure continue creusée dans la roue et où circule l'extrémité cylindrique de l'arbre du pignon.

La machine étant dans la situation indiquée par la figure, si le pignon tourne dans le sens de la petite flèche, il oblige la roue de tourner dans le sens de la grande, jusqu'à ce que la dent extrême A étant venue en contact avec le pignon ne puisse plus descendre, soit parce que le butoir touchant l'arbre du pignon s'y oppose, soit parce que la rainure arrondie amène le pignon au-dessus de cette dent. Alors le pignon continuant de tourner s'appuie sur cette même dent pour passer à l'intérieur de la denture, qu'il fait par conséquent tourner dans le sens contraire à celui de la grande flèche.

2e GENRE. AXES NON PARALLÈLES.

196. Communication immédiate. — 98. *Marteau à soulèvement latéral.* Il diffère du marteau frontal (85) en ce que l'axe

de rotation de l'arbre à cames et l'axe de rotation du marteau, situés dans un plan horizontal, sont perpendiculaires l'un à l'autre. Les surfaces de contact des cames et du manche doivent être de forme conique, ayant le sommet à la rencontre des deux axes.—99. *Balancier appuyé sur un excentrique conique.* 100. *Balancier appuyé sur un filet de vis d'inclinaison variable.* Si la pression mutuelle des deux corps en contact était considérable, ces deux dernières dispositions auraient l'inconvénient d'une grande résistance due au frottement.

197. Communication par bielle. —101. *Manivelle, balancier et bielle à joint brisé.* Ce mécanisme, employé dans les métiers de filature, ne diffère du numéro 87 qu'en ce que la bielle est articulée à joint brisé, ou plus simplement à double charnière, de manière à pouvoir s'écarter un peu (tantôt d'un côté, tantôt de l'autre) du plan du cercle décrit par l'extrémité du bras de la manivelle.

§ 5.

5e CLASSE. LIAISON DE DEUX MOUVEMENTS, L'UN CIRCULAIRE PROGRESSIF, L'AUTRE RECTILIGNE ALTERNATIF.

1er GENRE. TRANSLATION PARALLÈLE AU PLAN DE LA ROTATION.

198. Communication immédiate par excentrique. — 102. *Manivelle et tige guidée à coulisse.* — 103. *Excentrique circulaire et tige guidée à cadre.* Pendant que le centre du bouton de la manivelle ou le centre de figure de l'excentrique décrit une circonférence, le cadre ayant ses côtés à une distance invariable de ce centre, parallèles au plan de la circonférence et perpendiculaires à la direction de la tige, un point quelconque de celle-ci se meut comme la projection du centre mobile sur cette direction (art. 131). Les changements de sens du mouvement alternatif se font ainsi sans choc.

104. *Excentrique non circulaire et tige à cadre.* Ce genre de liaison a été étudié à l'article 132.

105. *Excentrique et tige à deux roulettes.* — 106. *Coulisse excentrique et tige à bouton.* — 107. *Excentrique et tige à roulette et à ressort.* Ces mécanismes, dont la théorie est très-simple, ont été déjà indiqués à l'article 135.

199. Communication immédiate par engrenage ou came. — 108. *Pignon partiellement denté et cadre guidé à deux crémaillères.* Ce mécanisme est représenté à une plus grande échelle par la figure 124. Le pignon partiel tourne autour de l'axe fixe O, dans le sens indiqué par la flèche, et porte un petit nombre de dents, trois, par exemple, A, B et C. Un cadre lié à une tige assujettie au mouvement rectiligne par deux guides HI, H'I', présente intérieurement deux crémaillères, **abcd**, *a'b'c'd'*, unies entre elles par deux arcs demi-circulaires **ad'**, *a'd*. On voit facilement que les trois dents A, B et C du pignon poussent successivement vers la droite les dents de la crémaillère **abc**, et par conséquent le cadre et sa tige, après quoi les trois mêmes dents du pignon poussent à gauche les dents de la crémaillère **a'b'c'** et ramènent le cadre de ce côté. Mais si l'appareil se réduisait aux parties qui viennent d'être indiquées, il y aurait au commencement de chaque course de la tige un choc qui serait plus ou moins violent, selon la rapidité du mouvement du pignon. On atténue ce choc au moyen d'une plaque DEFG fixée latéralement sur le pignon, et d'une came de même épaisseur **defg** fixée sur le cadre. A l'instant où l'appareil est dans la situation représentée par la figure, la dent A du pignon étant près de la courbe **a** de la crémaillère et ne l'ayant pas encore atteinte, la courbe DE de la plaque touche en **d** la courbe **de** de la came, et par conséquent commence par imprimer au cadre une vitesse égale à celle du point D, et plus petite que celle qu'il acquerra à l'instant du contact des dents A et **a**; et le passage de l'une à

l'autre de ces vitesses se fait très-rapidement mais sans choc, si les courbes **DE** et **de** sont convenablement tracées.

109. *Pilon et arbre à cames.* La théorie de ce mécanisme se trouve à l'article 133. C'est un cas particulier du marteau frontal (art. 192). Nous ajouterons ici l'indication d'un moyen d'atténuer l'intensité et les effets du choc qui a lieu entre la came et le pilon. La figure 125 en offre un exemple. La came se compose de trois parties à peu près d'égales épaisseurs et superposées ; leurs profils sont des développantes de cercles dont les rayons sont proportionnels aux nombres 1, 2 et 3. Ces cames sont disposées de manière à attaquer successivement leurs mentonnets respectifs fixés sur le pilon. Dans la figure, le mécanisme est représenté à l'instant où la première came attaque en **A** le mentonnet saillant du pilon. Lorsque l'arbre à cames aura tourné de l'angle **AOA'** et que le pilon se sera élevé de la hauteur A'_1C égale à l'arc **AB**, alors la seconde came **A'** attaquera le mentonnet A'_1 parvenu au plan horizontal de l'axe **O**. Lorsque, bientôt après, l'arbre à cames aura encore tourné d'un second angle **A'OB'**, moitié de **AOB**, et que par conséquent le pilon se sera élevé d'une nouvelle hauteur $A_1''D$ égale à l'arc **A'B'** et à l'arc **AB**, alors la troisième came **A''**, passant derrière le pilon, attaquera le mentonnet **A''** parvenu à son tour dans le plan horizontal de l'axe **O**. Les deux premières cames sont très-courtes, parce que chacune d'elles cesse d'agir aussitôt que la suivante est en prise. La troisième a toute l'étendue nécessaire pour la course qu'on veut donner au pilon. Il résulte de cette disposition que la première came imprime au pilon une vitesse qui n'est que le tiers de celle qu'il doit avoir définitivement, la seconde came la double et la troisième la triple. De là trois petits chocs successifs substitués au choc violent qui aurait lieu par l'emploi d'une came produisant immédiatement la même vitesse finale du pilon. C'est encore un exemple des chocs échelonnés dont on verra ailleurs l'avantage sous le rapport de l'économie du travail mécanique.

110. *Arbre à cames à mentonnets intérieurs.* Un arbre portant trois cames A, B et C (fig. 126), et tournant continuellement dans le sens ABC autour de l'axe O, communique un mouvement alternatif à un cadre aa'bc lié à une tige guidée. Dans la situation représentée par la figure, la came C qui poussait à gauche le cadre par son mentonnet c échappe au contact, et le cadre s'arrête. Bientôt après, la came A attaque le mentonnet a et le pousse à droite jusqu'à ce que leur contact arrive en a'. Alors cette came échappe, le mentonnet a et le cadre s'arrêtent, et au même instant le mentonnet c amené en c' est sur le point de recevoir la pression de la came B. On voit que la longueur de la course alternative du cadre est égale à aa' ou bb', et qu'il y a trois allées et venues à chaque tour de l'arbre à cames. Le temps d'arrêt dépend de la distance de la came A à son mentonnet a à l'instant où la came C échappe en c.

111. *Pignon et cadre à denture intérieure continue.* Le pignon est disposé comme celui du mécanisme décrit sous le numéro 97. L'arbre qui le porte repose donc sur deux supports qui lui permettent, en tournant toujours dans le même sens, d'osciller très-peu dans un plan perpendiculaire à la direction de la tige guidée à laquelle le pignon doit imprimer un mouvement alternatif. Dans le cas de la figure, la tige étant horizontale, l'axe du pignon oscille dans un plan vertical perpendiculaire à celui de cette figure. La tige est liée à un cadre denté intérieurement suivant deux droites raccordées avec demi-circonférences. A ce même cadre, mais en arrière de l'engrenage, se trouve solidement attachée une barre rectiligne contre laquelle s'appuie, tantôt en dessus, tantôt en dessous, le bout cylindrique ou tourillon de l'arbre du pignon qui est ainsi forcé d'engrener avec les dents du cadre. Cela étant, supposé que le pignon tourne de gauche à droite par-dessus, s'il occupe la position indiquée par la figure, son axe géométrique est alors immobile, et ce pignon, par sa rotation, oblige la crémaillère inférieure de se mouvoir vers la gauche jusqu'à ce que l'extré-

mité, à droite, de cette crémaillère, arrive dans le plan vertical de l'axe du pignon. A partir de cet instant, le cercle primitif du pignon, dans son mouvement considéré relativement au cadre, roulera sur le cercle primitif de l'engrenage demi-circulaire de droite de ce cadre ; et comme celui-ci ne peut se mouvoir qu'horizontalement, tandis que le centre du pignon ne peut se déplacer que verticalement, le pignon sera forcé de s'élever et viendra bientôt engrener avec la crémaillère supérieure qu'il obligera de se transporter de gauche à droite. Pour permettre au tourillon du pignon de passer alternativement au-dessus et au-dessous de la barre directrice, celle-ci a deux échancrures circulaires ayant mêmes centres que les demi-cercles dentés du cadre.

200. Communication par bielle ou par une corde. — 112 et 113. *Manivelle* ou *excentrique circulaire, bielle et tige guidée.* — 114. *Manivelle, double bielle et joug guidé lié à une tige.* Ces mécanismes ont une analogie évidente avec ceux des numéros 88 et 89, art. 194.

115. *Deux roues dentées égales, deux bielles égales et un joug menant une tige.* Les deux bielles égales sont articulées à égales distances des axes respectifs des deux roues dentées. Si la longueur du joug, mesurée entre ses deux articulations, est égale à la distance des deux axes de rotation, la loi du mouvement de ce joug et de sa tige est la même que dans le cas précédent, mais ici le joug n'a pas besoin d'être guidé.

116. *Manivelle tournant uniformément et balancier à coulisse et à bielle dont les courses sont de durées inégales.* Autour de l'axe O (fig. 127) tourne une manivelle dont le bouton B décrit la circonférence BC'B'C''. Ce bouton glisse en même temps dans une coulisse rectiligne BB' faisant partie d'un balancier qui oscille autour de l'axe A. Au point D ce balancier est articulé avec une bielle DE dont le point E est assujetti à se mouvoir sur la droite E'E''. D'après cela, en menant les tan-

gentes AC′ et AC″, on a les deux positions extrêmes de la ligne milieu du balancier et de sa coulisse. Le mouvement étant supposé dans le sens de la flèche, l'oscillation de AC′ en AC″ a lieu pendant le parcours du bouton sur l'arc C′B′C″, et l'oscillation de AC″ en AC′ pendant qu'il parcourt l'arc C″BC′. Quant à la bielle, en faisant AD′=AD″=AD, puis D′E′=D″E″=DE, longueur de cette bielle, on a les positions extrêmes E′ et E″ de l'articulation E. Ainsi E′E″ est la longueur de la course de la pièce guidée, et les durées des oscillations de E′ en E″ et de E″ en E′ sont proportionnelles aux arcs C′B′C″ et C″BC′.

Ce mécanisme convient, par exemple, lorsque la pièce guidée porte un outil qui a une plus grande résistance à vaincre dans un sens que dans l'autre.

117. *Manivelle et poulie de renvoi.* Dans ce mécanisme, que la figure fait immédiatement comprendre, une corde fait fonction de bielle. La théorie de cette disposition se rattache à celle du numéro 144. Ainsi, à chaque instant, le rapport des vitesses angulaires de la poulie et de la manivelle égale celui du rayon de la poulie à la plus courte distance de la corde à l'axe de la manivelle. La longueur de la course alternative de la partie pendante de la corde est égale au double du rayon de la manivelle.

201. Communication par engrenage intermédiaire. — 118. *Roue à mouvement épicycloïdal de Lahire.* En O est l'axe de rotation d'un arbre tournant. Une grande roue dentée à dents intérieures est immobile, ayant son plan moyen perpendiculaire à cet axe et son centre sur cette même droite. Sur l'arbre tournant est calée une manivelle dont le bras OC est la moitié du rayon primitif de la grande roue. Sur le bouton dont l'axe est en C est assemblée à frottement doux une seconde roue dentée dont le rayon primitif est égal à OC et qui engrène avec la première, de manière que le cercle primitif de la petite

roue roule dans le cercle primitif de la grande. On sait (93) que dans ce cas un point quelconque de la circonférence mobile décrit un diamètre de la circonférence fixe. Pour utiliser cette propriété on fixe, en saillie sur une face latérale de la petite roue, un second bouton dont l'axe passe en un point **B** de sa circonférence primitive et l'on y articule une bielle qu'on assujettit à passer en un autre point **D**, sur le prolongement de la droite **OB**. L'étude de ce mécanisme, plus curieux que pratiquement utile, se réduit à celle de la figure 128 dont toutes les lignes sont dans un même plan. L'articulation **B** de la bielle décrit le diamètre **B'OB''**, et la distance **B'B** est parcourue pendant que la manivelle **OC** décrit l'angle **B'Ob**. Donc le point **B** de la tige est à chaque instant la projection sur le diamètre **B'B''** du point mobile **b** situé sur le prolongement de la manivelle **OC** et parcourant la circonférence de la grande roue. C'est la même loi de mouvement qu'on réalise plus simplement aux numéros 102 et 103.

2e GENRE. TRANSLATION PARALLÈLE A L'AXE DE LA ROTATION.

202. Communication immédiate. — 119. *Plateau incliné tournant sur un pivot et tige à galet.* La théorie de ce mécanisme est expliquée à l'article 109.

120. *Roue à ondes et tige à galet.* Si la tige est horizontale, un ressort oblige la roulette de rester en contact avec la roue; si elle était verticale, son poids pourrait suffire.

121. *Rainure continue dans un cylindre tournant, et cheville glissante.* Cette disposition est analogue à celle du numéro 62 mentionnée à l'article 184. Pour maintenir la cheville glissante dans la rainure qu'elle doit parcourir aux points de croisement, on la munit à son extrémité d'une languette effilée et mobile autour de l'axe de la cheville.

CHAPITRE III

ORGANES SERVANT A ÉTABLIR, INTERROMPRE OU MODIFIER LES LIAISONS DE MOUVEMENT DANS LES MACHINES.

§ 1.

EMBRAYAGES, MOYENS D'ÉTABLIR ET DE FAIRE CESSER A VOLONTÉ UNE LIAISON DE MOUVEMENT.

203. Embrayage par manchon mobile de deux arbres en prolongement l'un de l'autre. — 122. *Embrayage à dents héliçoïdes.* Au bout d'un des arbres est calée invariablement une pièce dite *manchon d'embrayage*, ayant du côté qui regarde l'autre arbre un certain nombre de saillies égales; sur l'autre arbre est monté un autre manchon pouvant glisser à frottement doux le long de cet arbre, mais sans pouvoir tourner autrement qu'avec lui. Il a d'ailleurs des saillies égales aux premières et par conséquent en même nombre. Il présente de plus une gorge analogue à celle d'une poulie, où entrent les branches d'une fourche dite *fourche d'embrayage*, formant un levier mobile autour d'un axe fixe, et au moyen de laquelle on engage à volonté les saillies du manchon glissant entre celles du manchon calé, ce qui s'appelle *embrayer;* ou bien on les dégage, ce qui s'appelle *désembrayer* ou *débrayer*. Dans le premier cas les deux arbres tournent ensemble; dans le second l'un peut tourner tandis que l'autre reste immobile.

La forme des saillies ou dents des manchons d'embrayage n'a rien d'absolu. Lorsque le sens de la rotation de l'arbre mo-

teur est déterminé et toujours le même, la meilleure forme est celle qu'indique la figure 122 du tableau synoptique. Les surfaces des dents destinées à se toucher sont des surfaces héliçoïdes et des plans passant par l'axe de rotation; leurs profils sur les surfaces cylindriques qui les terminent sont des portions d'hélices et des droites parallèles à l'axe. Il en résulte qu'à l'instant où les manchons rapprochés par la fourche commencent à se toucher, ils frottent l'un sur l'autre jusqu'à ce que les faces planes se pressent mutuellement. Le frottement qui précède cet instant peut commencer à mettre en mouvement l'arbre mené et atténuer un peu le choc.

Si le sens de la rotation de l'arbre moteur est variable, les dents doivent avoir la forme de créneaux rectangulaires; mais dans ce cas il est incommode de faire l'embrayage pendant la marche.

123. *Embrayage à cônes de friction.* Les deux manchons se touchent par des surfaces coniques, l'une concave, l'autre convexe. Moyennant une pression suffisante exercée par la fourche d'embrayage, l'un des deux cônes entraîne l'autre. Si une résistance exceptionnelle ou un obstacle absolu vient à s'opposer au mouvement de l'arbre mené, les cônes glissent l'un dans l'autre, et l'arbre moteur se ralentit peu à peu; on évite ainsi les chocs et les ruptures.

124. *Désembrayage brusque.* Il importe quelquefois de pouvoir, en cas d'accident, séparer rapidement les deux manchons d'embrayage, malgré une grande résistance au glissement. Pour cela, en dehors des deux surfaces cylindriques qui limitent les dentures d'embrayage, on ajoute deux rebords, dont l'un, faisant partie du manchon calé, a la forme simplement annulaire ou de révolution, et l'autre laisse entre lui et le premier un intervalle dont la largeur, dans une partie seulement de son pourtour, est constante et un peu plus grande que la longueur des dents de l'embrayage, tandis que, dans le reste du pourtour, l'intervalle des deux rebords se réduit d'une manière continue jusqu'à

devenir nulle. A l'instant où l'on veut désembrayer, un ouvrier pousse dans l'intervalle une forte tige de fer, espèce de verrou maintenu par des guides dans une direction perpendiculaire à celle des arbres : la surface inclinée du second rebord rencontrant cette tige s'écarte de l'autre, ce qui produit l'effet désiré.

125. *Embrayage à vis.* Dans les machines très-puissantes, les manchons d'embrayage peuvent être trop lourds pour être manœuvrés au moyen d'une simple fourche. Dans ce cas, les boutons qui s'engagent dans la gorge du manchon glissant sont mis en mouvement par une combinaison de leviers, de bielles et de vis dont la figure 125 offre un exemple.

204. Embrayage de deux arbres à roues dentées. — 126. *Par manchon glissant.* Deux roues dentées sont continuellement engrenées; mais l'une **a** est calée solidement sur son arbre, tandis que l'autre **b** peut tourner sur le sien sans l'entraîner; c'est ce qu'on exprime en disant que cette roue est *folle* sur son arbre. Ce même arbre porte un manchon d'embrayage pouvant y glisser longitudinalement, mais ne pouvant tourner qu'avec lui. Ce manchon est armé de dents ou saillies qui, lorsqu'il est suffisamment rapproché de la roue, s'engagent dans les intervalles des bras de celle-ci, et alors les deux arbres fonctionnent comme si la roue **b** était calée sur le sien.

Ce mécanisme peut être employé de deux manières : si le moteur agit sur l'arbre à manchon, cet arbre tourne continuellement; les deux roues dentées tournent quand le manchon est embrayé, sans quoi elles restent immobiles et, par conséquent aussi, l'arbre de la roue **a** s'arrête. Si, au contraire, c'est sur ce dernier arbre qu'agit le moteur, il tourne continuellement ainsi que les deux roues dentées; mais l'arbre de la roue **b** ne tourne que lorsque le manchon est embrayé.

La figure 126 indique deux arbres parallèles; mais cette condition n'est pas nécessaire.

127. *Embrayage d'un engrenage par le glissement en long d'un*

des deux arbres. L'arbre glissant **a** porte deux gorges dans l'une desquelles s'engage un *levier d'arrêt* **b** pour fixer la position de cet arbre. Dans le cas de la figure on voit deux roues dentées désembrayées. Pour embrayer on soulèverait le levier d'arrêt, on pousserait l'arbre **a** à gauche et l'on ferait retomber le levier d'arrêt dans la seconde gorge. Les deux arbres peuvent n'être pas parallèles. Le désembrayage se fait aisément pendant la marche, mais non l'embrayage.

Au lieu de faire glisser l'arbre, on fait quelquefois glisser la roue sur l'arbre; mais cette opération ne se fait pas ordinairement pendant la marche.

205. Embrayage par rouleaux ou cônes de friction. — 128. *Embrayage de deux arbres parallèles.* Un arbre horizontal tournant autour d'un axe fixe **A** porte un rouleau cylindrique; un autre arbre, sur lequel est fixé un autre rouleau **B**, a un de ses tourillons porté par une poutrelle mobile autour d'un axe **C**. Cette poutrelle fait un petit angle avec la verticale, de sorte que sous l'action de la pesanteur elle repose sur un appui fixe **D**; et alors les deux rouleaux ne se touchant pas, le second arbre est sans mouvement. Mais si, par un moyen quelconque, comme par exemple une corde, on relève la poutrelle et l'on force les rouleaux de se presser mutuellement, il y a communication de mouvement de l'un à l'autre.

Si les deux axes de rotation n'était pas parallèles, au lieu de rouleaux cylindriques de friction, on emploierait des cônes.

129. *Embrayage, par rouleau de pression, d'un arbre tournant et d'une tige guidée.* Un rouleau **A** tourne continuellement autour d'un axe fixe horizontal; une tige verticale **BB** le touche, mais n'est entraînée dans son mouvement que lorsqu'elle est suffisamment pressée contre lui. A cet effet un autre rouleau, dit *rouleau de pression*, est lié à un levier ou à un système de leviers mobiles autour d'axes fixes **C**, **C'**, sur lequel agit un ouvrier pour transmettre la pression nécessaire. La tige s'élève jusqu'à

ce que l'ouvrier lâche le levier; aussitôt cette pression cesse, et le poids de la tige la fait retomber.

206. Embrayage des courroies sans fin. — 130. *Par poulie folle.* Un arbre qui n'est pas représenté dans la figure tourne continuellement et porte un tambour embrassé par une courroie sans fin. Un autre arbre parallèle au premier porte deux poulies, l'une calée **a**, l'autre folle **b**. Une fourche d'embrayage, pouvant osciller autour d'un axe fixe **C**, sert à mettre à volonté la courroie sur la poulie folle ou sur la poulie calée. Dans le premier cas, le second arbre et la poulie calée restent immobiles, tandis que la poulie folle tourne : la courroie est désembrayée. Dans le second cas, le mouvement est transmis à la poulie calée et à son arbre, et la poulie folle, qui n'éprouve presque aucune résistance, tourne aussi entraînée par le faible frottement de son arbre.

Remarques. — 1° La fourche d'embrayage placée près d'une poulie doit (172) agir sur la partie de la courroie qui se meut vers la poulie, et non sur celle qui en sort.

2° La poulie calée ne perd pas brusquement la vitesse de la courroie au même instant où celle-ci est embrayée. La courroie commence par glisser, et l'on peut même faire arriver la poulie à sa vitesse définitive par une gradation lente, en poussant peu à peu la fourche d'embrayage. On emploie quelquefois dans cette intention une fourche d'embrayage à vis indiquée ci-après à la figure 138.

131. *Embrayage d'une courroie sans fin par un tendeur.* Une courroie sans fin ne peut transmettre le mouvement d'une poulie à une autre qu'autant qu'elle est suffisamment tendue. La figure montre un moyen de produire et de faire cesser à volonté cette tension. Une *poulie de tension* a sa chape à une extrémité d'une des branches d'un levier coudé tournant sur un axe fixe **a**; à

l'autre branche est attachée une corde qui, suivant qu'elle est tirée ou lâchée, presse la poulie de tension contre la courroie ou la laisse s'en détacher par l'effet de la pesanteur.

152. *Embrayage d'une courroie sans fin par déplacement d'un palier.* En écartant les axes des poulies on tend la courroie ; en les rapprochant on la détend.

207. Embrayages par déclics. — 153. *Déclic appliqué à une poulie.* Un arbre horizontal A tourne continuellement dans le sens indiqué par la flèche. Il porte une poulie folle sur une face de laquelle est fixé l'axe a d'un petit levier pressé par un ressort et terminé à un bout par un crochet ou loqueteau b. Sur celui-ci s'appuie une pièce calée sur l'arbre. Dans cet état l'arbre en mouvement entraîne la poulie qui peut servir à soulever un corps suspendu à une corde enroulée sur cette poulie. Mais bientôt la queue du levier vient rencontrer un obstacle c. Le crochet b s'éloignant du centre, la pièce calée sur l'arbre échappe et laisse retomber le corps suspendu. Immédiatement la queue du levier ayant quitté l'obstacle, le loqueteau est ramené par le ressort à sa première position ; la pièce calée revient le rencontrer, et l'embrayage est rétabli au delà de l'obstacle. La poulie peut ainsi faire environ un tour alternativement dans les deux sens.

154. *Déclic appliqué à un mouton.* Deux pièces verticales dites *jumelles* servent de guides à un corps d'un poids très-grand appelé *mouton*, qui doit alternativement être élevé puis retomber librement pour produire un choc. A cet effet un autre corps également guidé par les jumelles est interposé entre le mouton et la corde qui doit l'élever en passant sur une poulie. Cette pièce intermédiaire porte deux leviers articulés analogues aux deux branches d'une tenaille ; deux ressorts, en écartant leurs bras supérieurs, rapprochent leurs mâchoires inférieures, qui, étant introduites dans un anneau fixé au mouton, obligent celui-ci de suivre le mouvement ascendant de la corde. Quand

il atteint le haut de sa course, les bras supérieurs de la tenaille auxquels on a donné une courbure convenable pénètrent dans un orifice fixe qui les force de se rapprocher; par conséquent les mâchoires s'écartent et laissent échapper l'anneau du mouton qui tombe.

§ 2.

MOYENS DE MODIFIER UNE LIAISON DE MOUVEMENTS.

208. Changement de vitesse angulaire par roues dentées, et manchon d'embrayage. — 135. *Axes parallèles.* — 136. *Axes concourants.* — 137. *Cas particulier du mécanisme précédent.*

Deux arbres dont les axes de rotation sont dans un même plan portent deux paires de roues dentées. Les deux roues **A** et **B** qui appartiennent à un de ces arbres y sont calées; les deux autres, engrenant constamment avec les deux premières, sont folles sur le second arbre, et dans leur intervalle joue un manchon d'embrayage analogue à celui de la figure 126, si ce n'est qu'il est *double,* c'est-à-dire qu'il y a des dents ou saillies sur ses deux bases opposées. Suivant qu'il est engagé à droite ou à gauche, c'est l'une ou l'autre des deux paires de roues qui fonctionne comme si elle était seule.

Si, comme au numéro 135, les deux axes de rotation sont parallèles ou se rencontrent hors de l'intervalle des deux roues folles, le déplacement du manchon change seulement le rapport des vitesses angulaires sans en altérer le sens; tandis que si les axes de rotation se rencontrent dans l'intervalle des deux roues folles, comme au numéro 136, le transport du manchon de l'une à l'autre change le sens de la rotation d'un des arbres, le sens de l'autre restant le même.

Le mécanisme n° 137 n'est qu'un cas particulier du précé-

dent : c'est celui où les deux roues calées se confondent ou se réduisent à une seule. Dans ce cas, le rapport des deux rotations reste constant, et le sens de l'une d'elles change seulement.

Conformément à la remarque faite sur le numéro 126, les dispositions dont il est ici question peuvent être employées de deux manières, suivant que le moteur oblige de tourner continuellement l'arbre à manchon ou l'arbre des roues calées.

209. Changement de vitesse angulaire par le déplacement d'une courroie sans fin sur diverses poulies égales. — 138. *Axes parallèles.* — 139. *Axes concourants.* Dans la disposition n° 138, un même arbre **A** porte quatre poulies d'égal diamètre et voisines les unes des autres. La première à droite est folle; la deuxième **a** est calée immédiatement sur l'arbre; la troisième **b** est calée sur un *canon* ou tube cylindrique tournant librement sur ce même arbre; la quatrième **c** est calée sur un deuxième canon qui est moins long que le premier et qui tourne librement sur celui-ci. Sur ce même canon et à côté de la quatrième poulie est calée une roue dentée **c'** dont la figure représente seulement une coupe; plus loin à gauche est fixée au bout du premier canon une deuxième roue dentée **b'**, plus petite que la première; plus loin encore est calée sur l'arbre même une troisième roue dentée plus petite que la seconde. Sur un second arbre **B** parallèle au premier sont fixées trois autres roues dentées **c''**, **b''**, **a''**, qui engrènent constamment avec les trois précédemment indiquées, et dont les diamètres varient par conséquent en sens inverse. Une courroie sans fin, mise en mouvement par un tambour non représenté dans la figure, est embrayée tour à tour sur les quatre poulies et fait ainsi varier la vitesse de l'arbre **B**, celles du tambour et de la poulie embrayée restant la même. Le calcul du rapport variable des vitesses en fonction des rapports des rayons des roues dentées n'offre point de difficulté.

Si les arbres parallèles **A** et **B** étaient éloignés l'un de l'autre, on substituerait aux roues dentées des poulies constamment embrassées par trois courroies sans fin. Dans les deux cas, l'arbre **B** arrive du repos à sa plus grande vitesse, en passant par deux états intermédiaires.

Dans la disposition du numéro 139, un arbre **A** supposé horizontal porte trois poulies accolées d'égal diamètre, l'une au milieu qui est folle, une autre à droite **a** calée sur l'arbre, la troisième à gauche **b** calée sur un canon tournant librement sur cet arbre. Sur ce canon est fixée une roue dentée conique **b'** indiquée en coupe, et à une certaine distance à gauche, est fixée sur l'arbre même une autre roue dentée conique **a'**. Ces deux roues engrènent respectivement avec deux autres **a''** et **b''** fixées sur nn arbre **B** perpendiculaire au premier **A**. Pour se rendre compte de l'effet du déplacement de la courroie, qu'on la suppose d'abord sur la poulie **a**, et lui imprimant le mouvement dans le sens indiqué par la flèche 1. L'arbre **A** et la roue **a'** participent à cette rotation, et l'arbre **B** tourne dans le sens de la flèche 2, et la roue **b'** suivant la flèche 3. Lorsque, au contraire, la courroie mène la poulie **b**, tous les mouvements changent de sens, et il y a entre ces deux états un temps d'arrêt pendant lequel la courroie embrasse la poulie folle. En changeant de sens la rotation de l'arbre **B** peut aussi changer de grandeur; il suffit pour cela que le rapport des rayons des roues **a'** et **a''** diffère de celui des rayons des roues **b'** et **b''**.

Les remarques de l'article 212 s'appliquent à tous les changements de vitesse obtenus au moyen du déplacement d'une courroie sans fin.

210. Changement de vitesse angulaire par tambours de rayons variables ou par poulies étagées. — 140. *Courroie sans fin sur deux tambours de rayons variables.* Sur deux axes parallèles tournent deux solides de révolution ou longues poulies embrassées par une courroie sans fin. Les diamètres variant en

sens inverses sont tels, que, quel que soit le plan perpendiculaire aux axes dans lequel soit placée la ligne-milieu de la courroie, celle-ci, étant d'une longueur invariable, soit toujours tendue également et suffisamment pour que la rotation d'un des tambours entraîne celle de l'autre sans glissement. Un double guide-courroie muni, si l'on veut, de rouleaux et porté par une tige guidée parallèle aux axes, détermine à volonté la position de la courroie et par suite le rapport des vitesses angulaires des deux tambours. Ce rapport variable est inverse du rapport des rayons des cercles actuellement embrassés, la courroie étant supposée inextensible. Le guide-courroie, analogue à la fourche d'embrayage ordinaire, en diffère en ce qu'il doit agir incessamment, sans quoi la courroie, se portant vers le gros bout de chaque tambour, s'y placerait obliquement avec une très-grande tension.

Si la courroie est croisée, la condition d'égale tension ou de longueur invariable de cette courroie exige seulement que la somme des rayons correspondants soit constante. Soient en effet (fig. 129) a la distance Cc des axes parallèles, R et r les rayons des cercles actuellement embrassés, l la longueur AB ou A'B' des parties rectilignes de la courroie sans fin, α l'angle ACc ou BcC exprimé par le rapport de l'arc qu'il comprend au rayon, enfin $2L$ la longueur totale de la courroie. On a évidemment

$$L = l + R(\pi - \alpha) + r(\pi - \alpha), \quad a\cos\alpha = R + r \quad \text{et} \quad l = a\sin\alpha,$$

d'où il suit que α et L sont invariables quand la somme $R + r$ reste constante.

Lorsque la courroie n'est pas croisée cette relation n'existe plus. On a

$$L = l + R(\pi - \alpha) + r\alpha, \quad l = a\sin\alpha \quad \text{et} \quad R - r = a\cos\alpha;$$

trois équations qui déterminent les six quantités a, L, l, R, r et α quand trois d'entre elles sont connues, ou que l'une de ces données est remplacée par une quatrième relation.

Si, par exemple, on adopte l'hypothèse limite $r = o$, et qu'on suppose $a = 1$ et $\alpha = \frac{3}{8}\pi$, on trouve

$$R = \cos\alpha = 0{,}3827, \quad l = \sin\alpha = 0{,}9239,$$

et

$$L = l + \frac{5}{8}\pi R = 1{,}6753.$$

Supposons, autre hypothèse extrême, que les rayons R et r soient égaux, et conservons la même distance des axes et la même longueur de la courroie. Soient donc $a = 1$ et $L = 1{,}6753$.

On a alors

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad l = 1 \quad \text{et} \quad L = 1 + \pi R_1,$$

d'où

$$R_1 = \frac{0{,}6753}{\pi} = 0{,}2149.$$

Ainsi, entre les deux cas extrêmes qui viennent d'être considérés, la somme des rayons varie de 0,3827 à 0,4298, et n'est par conséquent pas, à beaucoup près, constante.

En conservant les valeurs précédentes de a et de L, et en attribuant à l'angle α diverses valeurs, de $\frac{3}{8}\pi$ à π, on calculera très-aisément autant de couples de valeurs de R et de r.

Lorsque la courroie est croisée et que par conséquent la somme $R + r$ doit être constante, le rapport des vitesses angulaires devient une fonction simple de l'un des rayons. Soient w et W ces vitesses correspondantes aux rayons r et R : si l'on pose

$$c = r + R;$$

on a

$$\frac{w}{W} = \frac{c-r}{r} = \frac{c}{r} - 1.$$

Dans cette même hypothèse les deux tambours peuvent être coniques ; ces deux troncs de cônes à axes parallèles ont même angle au sommet, et sont posés en sens inverses, de manière que leurs génératrices les plus éloignées **aa'** et **bb'** sont parallèles, de même que les deux plus rapprochées **aa** et **bb**. Alors r est proportionnel à la distance de la courroie au sommet du cône auquel appartient ce rayon r.

Lorsqu'on veut que le rapport $\frac{w}{W}$ dépende, suivant une autre loi, de la position de la courroie, les profils méridiens de tambours doivent être curvilignes, les deux courbes les plus rapprochées **aa** et **bb** restant égales et parallèles pour satisfaire à condition $R + r = \text{const.}$

Si, par exemple, on veut que $\frac{w}{W}$ soit proportionnel à la distance x de la courroie à un plan fixe perpendiculaire aux axes, on posera

$$\frac{c}{r} - 1 = \frac{x}{a} \quad \text{d'où} \quad ac = r(x+a);$$

par conséquent le profil du tambour ayant la rotation w est une hyperbole équilatère dont l'axe de ce tambour est une asymptote.

141. *Deux tambours dont l'un est cylindrique.* Le tambour conique monté à frottement doux sur un arbre carré ou sur un arbre rond à languette, est lié à une gorge dans laquelle s'engage une fourche qui pousse le tambour à droite ou à gauche, selon qu'on veut diminuer ou augmenter le rapport de la vitesse angulaire du cône à celle du cylindre. La figure indique la position de deux poulies de renvoi **P**, dont les arbres glissent dans

des coulisses parallèles à l'axe du cylindre; elles déterminent les deux plans où se meuvent les parties rectilignes de la courroie sans fin, et font en même temps fonction de poulie de tension =.

142. *Poulies étagées.* Les deux mécanismes précédents permettent de faire varier, d'une manière continue et pendant la marche, le rapport des vitesses angulaires. Lorsque cette condition n'est pas imposée, on emploie plusieurs paires de poulies disposées pour être, à volonté, embrassées par une même courroie. L'inconvénient est le temps d'arrêt nécessaire pour changer sans changer la position de la courroie; mais l'avantage est que la courroie une fois placée ne tend pas à changer de position, et que l'action continuelle d'un guide-courroie n'est plus indispensable.

211. Rapport variable des vitesses angulaires d'un cône ou d'un plateau circulaire et d'une roulette.—143. *Cône et roulette.* Un tronc de cône A (fig. 133) tourne autour d'une axe fixe; son arbre porte une roue ou une poulie dont le rayon est r; la vitesse angulaire commune au cône et à la roue est w. Une roulette dont le rayon est a touche le cône au point T et tourne avec une vitesse angulaire w' autour d'un axe géométrique aa situé dans un même plan avec l'axe du cône, et parallèle à sa génératrice la plus voisine. Il en résulte que le contact du cône et de la roulette subsiste lorsque l'arbre de celle-ci se déplace longitudinalement. Autour de ce même arbre tourne une roue ou poulie dont le rayon est r', et qui a la même rotation w', sans déplacement longitudinal.

Le rapport des vitesses angulaires w et w' dépend de la position variable de la roulette. Soit y, sa distance TS au sommet du tronc de cône, et soit γ l'angle de la génératrice et de l'axe. La vitesse linéaire commune de la roulette et du cône, en leur point de contact T, est wz et $w'a$; ainsi

$$wy \sin \gamma = w'a.$$

Pour avoir la relation des chemins dx et dx' parcourus pendant le temps dt, par deux points pris sur les circonférences dont les rayons sont r et r', il suffit d'écrire $dx = wr\,dt$ et $dx' = w'r'\,dt$, d'où l'on conclut

$$r'y \sin\gamma\, dx = ra\, dx'$$

et en intégrant

$$\int y dx = \frac{ra}{r' \sin\gamma} x',$$

de sorte que si l'on considère les espaces x parcourus à partir d'une position déterminée, par un point quelconque de la circonférence de rayon r, et si l'on assujettit la distance y à être à chaque instant égale à une fonction $f(x)$ de la variable x, l'espace x' parcouru depuis l'instant initial par un point de la circonférence de rayon r', étant affecté du coefficient constant $\frac{ra}{r' \sin\gamma}$, est numériquement égal à l'intégrale $\int f(x)\,dx$, prise depuis zéro jusqu'à l'instant final.

144. *Plateau tournant et roulette.* Ce mécanisme peut être considéré comme un cas particulier du précédent. Un plateau circulaire A, supposé horizontal, tourne autour d'un axe vertical, ainsi qu'une roue ou poulie dont le rayon est r. Leur vitesse angulaire commune est w. La roulette dont le rayon est a s'appuie sur le plateau et tourne autour d'un axe géométrique fixe, horizontal et concourant avec l'axe vertical. La vitesse angulaire de la roulette et d'une roue dont le rayon est r' est désignée par w'. La distance y de la roulette à l'axe vertical est variable, tandis que la roue r' n'a qu'un mouvement simple de rotation.

La vitesse linéaire commune de la roulette et du plateau en leur point de contact T donne l'équation

$$wy = w'a,$$

et si dx et dx' sont les chemins parcourus pendant le temps dt sur les circonférences des roues r et r', on a $dx = \omega r\,dt$ et $dx' = \omega' r'\,dt$, d'où l'on conclut :

$$r'y\,dx = ra\,dx',$$

et, en intégrant,

$$\int y dx = \frac{ra}{r'}\,x',$$

formule analogue à la précédente, et donnant lieu à la même interprétation.

Telle est la théorie fort simple du planimètre d'Ernst et du dynamomètre compteur de MM. Poncelet et Morin.

212. Changement de vitesse par vis sans fin.— 145. *Mouvement hélicoïdal dont la translation change à volonté de sens.* Un arbre, qui dans la figure est supposé horizontal, tourne continuellement dans un même sens ; il porte une roue dentée calée qui engrène constamment avec une autre roue montée à rainure et languette sur un arbre vertical ; la languette est fixée dans l'œil circulaire de la roue, et la rainure est creusée dans l'arbre, de manière que celui-ci tourne continuellement, mais peut glisser en montant ou en descendant, tandis que la seconde roue, maintenue par un support fixe, reste toujours à la même hauteur. Le même arbre vertical est taillé à sa partie inférieuree en vis qui engrène sans fin avec deux roues dentées à axes horizontaux. Celles-ci tantôt tournent librement sur leurs coussinets, et tantôt deviennent momentanément fixes parce que l'une des deux est enrayée par l'ouvrier qui emploie la machine. Dans le premier cas, si le foret fixé à l'extrémité inférieure appuie sur une pièce de métal ou de bois à percer, l'arbre tourne en descendant à mesure que le trou se creuse : la vis et les deux roues folles où elle est engrenée ne produisent alors

aucun effet. Mais dans le second cas ces roues, devenant fixes, font la fonction d'un écrou immobile; la vis remonte, entraînant l'arbre vertical dans son mouvement hélicoïdal jusqu'à ce qu'elle soit entièrement hors de l'écrou.

NOTE

SUR LES ÉPICYCLOÏDES PLANES

(Mentionnée à la page 104).

On a vu (deuxième note annexée à l'article 88, pages 98 et 99) que

Lorsqu'une courbe **BAF** (fig. 40) *mobile dans son plan roule sans glisser sur une autre courbe* **B'AF'** *fixe dans le même plan et entraîne dans son mouvement une troisième courbe* **edaf** *invariablement liée avec elle et dans le même plan, si l'on considère la quatrième courbe* **e'd'a f'** *qui est l'enveloppe fixe des positions successives de la troisième, la normale commune* **aA**, *en un instant quelconque, à la troisième courbe et à son enveloppe, passe au point de contact actuel* **A** *des deux premières courbes, et le rayon de courbure* **AX** *ou* ρ *de l'enveloppe, suivant cette normale, satisfait à l'équation*

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\left(\frac{1}{r+n}+\frac{1}{\rho-n}\right)\cos\varphi, \qquad [1]$$

dans laquelle

R *et* R' *sont les rayons de courbure des deux premières courbes pour le point de contact* **A**,

r *est le rayon de courbure de la courbe entraînée* **edaf**, *pour le point* **a**,

n *est la distance* **aA**,

φ *est l'angle* **aAC'** *des deux normales* **Aa** *et* **AC'**.

Les termes de la démonstration que nous avons reproduite supposent que les deux premières courbes sont des cercles et que par conséquent les rayons R et R' sont constants ; mais cette hypothèse n'est pas nécessaire, et la démonstration ainsi que la formule [1] subsisterait si les deux courbes étaient quelconques et que leurs rayons de courbure R et R' fussent variables.

Rayon de courbure de l'épicycloïde. — Il s'agit ici d'étudier le cas particulier où la courbe enveloppe est une *épicycloïde plane*. Non-seulement les deux premières courbes sont alors des cercles et par conséquent les rayons R et R' sont constants, mais la courbe entraînée est réduite à un point, de sorte que r est nul, et de plus ce point est situé sur la circonférence mobile.

Il en résulte que dans la formule [1] il faut faire (fig. 130)

$$r = 0 \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{n}{2R}.$$

On a donc

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right)\frac{n}{2R}.$$

d'où

$$\rho = n + \frac{nR'}{2R + R'}. \qquad [2]$$

Ainsi le point décrivant étant **M**, pour avoir le centre de courbure **X** il suffit de prolonger **MA** égal à n en faisant

$$AX = \frac{nR'}{2R + R'};$$

c'est ce que l'on construit en traçant le diamètre **MD**, puis la droite **DC'** qui coupe **MA** prolongée en **X** ; car la corde **SD**

étant parallèle et égale à AM, on a la proportion

$$AX : SD :: AC' : C'S$$

ou

$$AX : n :: R' : 2R + R'.$$

Développée de l'épicycloïde. — Le lieu des points X est la développée de l'épicycloïde décrite par le point M. Soit OMK la moitié de cette épicycloïde : les arcs OA et AM sont de même longueur; l'arc $OAL = \pi R$; la droite $C'K = R' + 2R$. La formule [2] montre qu'au point O de la courbe OMK, où $n = 0$, le rayon de courbure est aussi nul; et qu'au point K, où $n = 2R$, on a

$$\rho = 2R + \frac{2RR'}{R' + 2R},$$

de sorte que le centre de courbure N correspondant satisfait aux relations

$$NL = \frac{2RR'}{R' + 2R} \quad \text{et} \quad C'N = \frac{R'^2}{R' + 2R}. \qquad [3]$$

Cette longueur C'N est le minimum de la distance du point variable X au centre C', et le tracé même approximatif, par points, de la courbe OXN suffit pour faire pressentir son analogie avec une épicycloïde. Pour confirmer cet aperçu, décrivons la circonférence NP autour de C', puis la circonférence dont le diamètre est AP. Il est facile de vérifier 1° que le point X est sur cette circonférence, et 2° que l'arc PX est de même longueur que l'arc NP.

Et en effet, 1° à cause du contact en A, le prolongement de MA donne une corde dont le rapport à MA ou n est celui de AP ou NL à $2R$; ce rapport d'après l'expression précédente de NL est $\frac{R'}{R' + 2R}$; la corde est donc égale à $\frac{nR'}{R' + 2R}$ ou à AX.

2° Les arcs PX et MS ou AD sont semblables. Donc

$$\text{arc PX} = \text{arc AD} \cdot \frac{\text{AP}}{2R} = \text{arc AL} \frac{\text{NL}}{2R}.$$

D'ailleurs on a

$$\text{arc PN} = \text{arc AL} \cdot \frac{\text{C'N}}{R'}.$$

Or, d'après les expressions [3] de NL et de C'N, on a

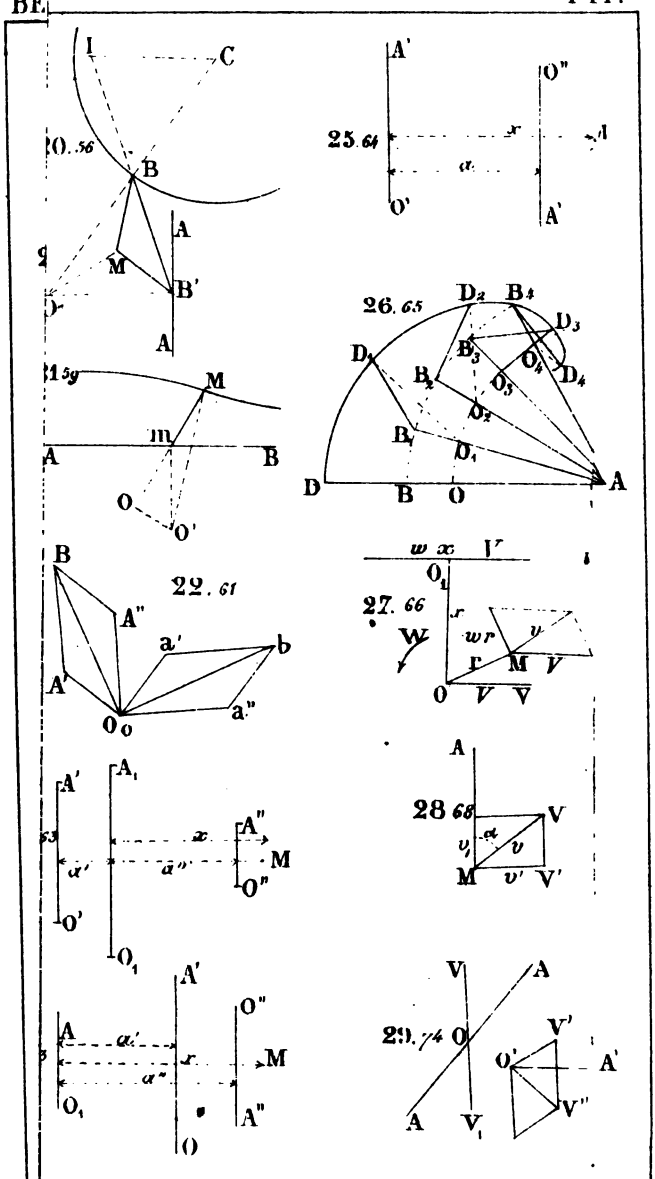
$$\frac{\text{NL}}{2R} = \frac{\text{C'N}}{R'},$$

donc les arcs PX et PN sont de même longueur.

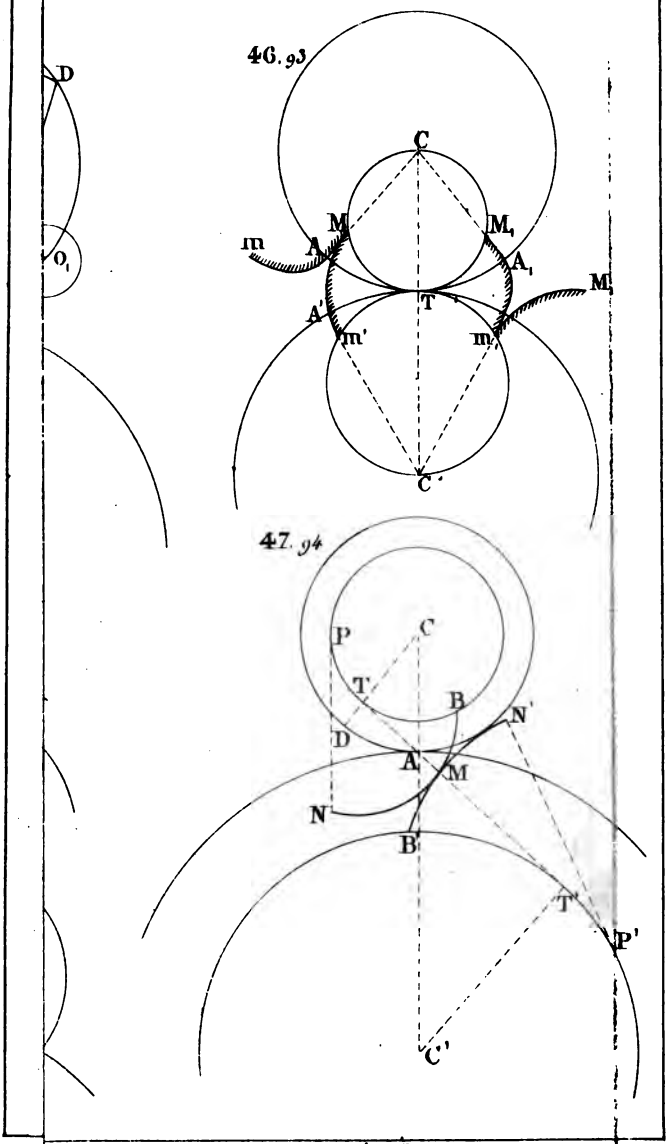
Donc la dévoloppée NXO est une épicycloïde décrite par le point X du cercle PXA roulant sur le cercle NP. Les rayons du cercle mobile et du cercle fixe sont dans le rapport de $\frac{1}{2}$ NL à C'N ou de R à R', d'après les relations [3]; donc la développée d'une épicycloïde est une courbe semblable à celle-ci, et leur rapport de similitude est celui de C'N à R', c'est-à-dire de R à R' + 2R.

(Le fond de cette note est emprunté à l'excellent ouvrage intitulé *Éléments de calcul infinitésimal*, par M. DUHAMEL, 1856.)

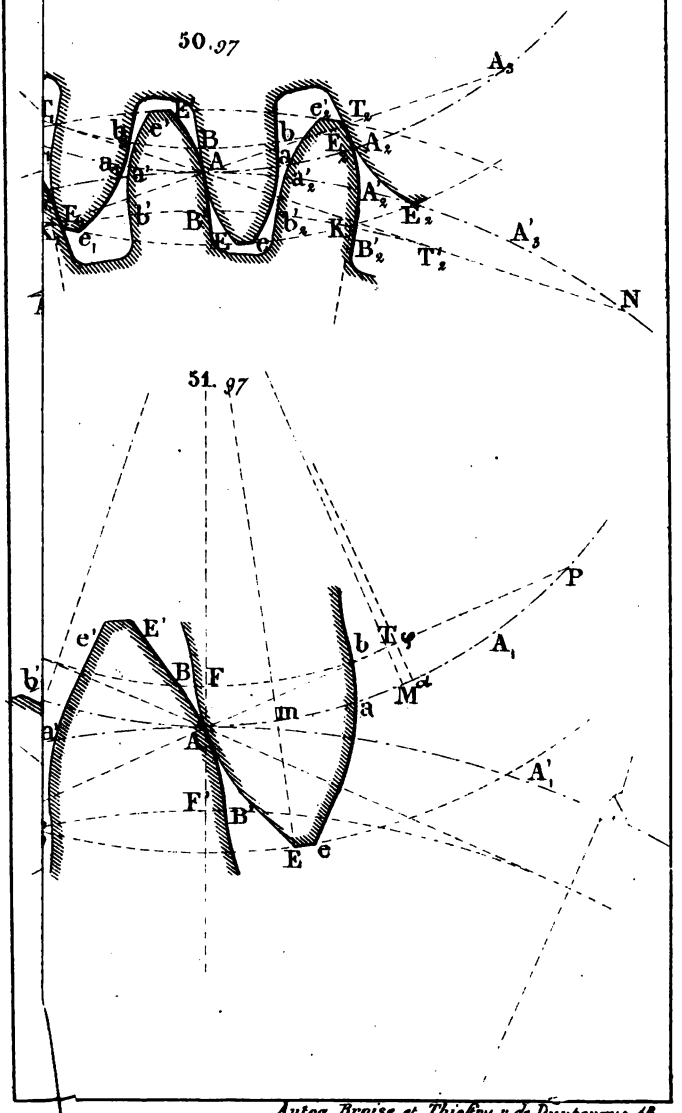
FIN.



Autog. Broise et Thieffry, r. de Dunkerque, 45, Paris

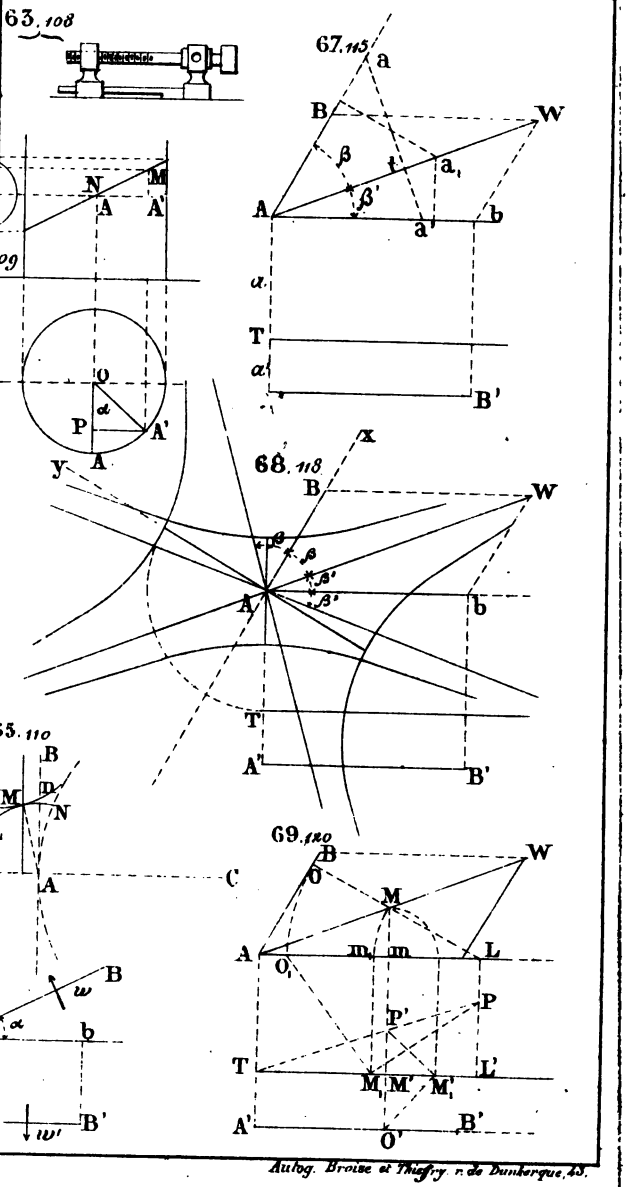


Autog. Broise et Thiéffry, r. de Dunkerque, 43, Paris.



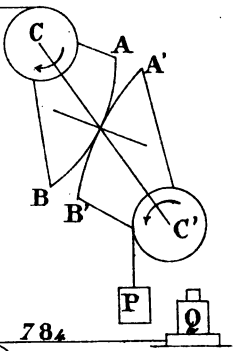
Autog. Broise et Thiefry, r. de Dunkerque, 48.

Pl. IV.

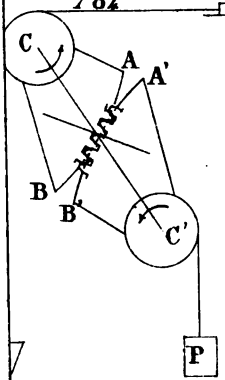


Autog. Broise et Thiefry r. de Dunkerque, 43.

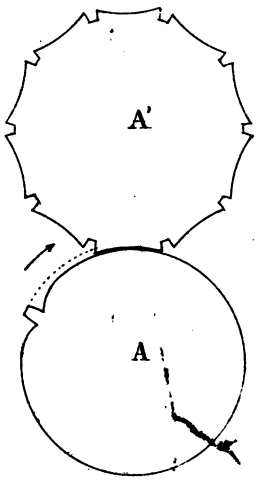
78₂



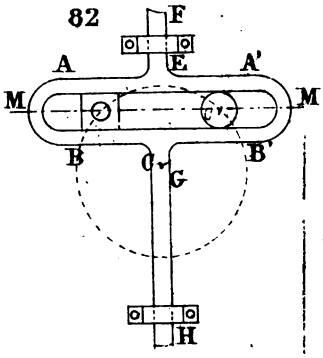
78₄



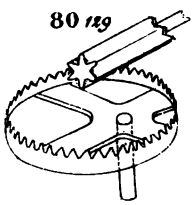
81. 130



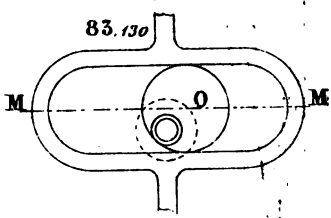
82



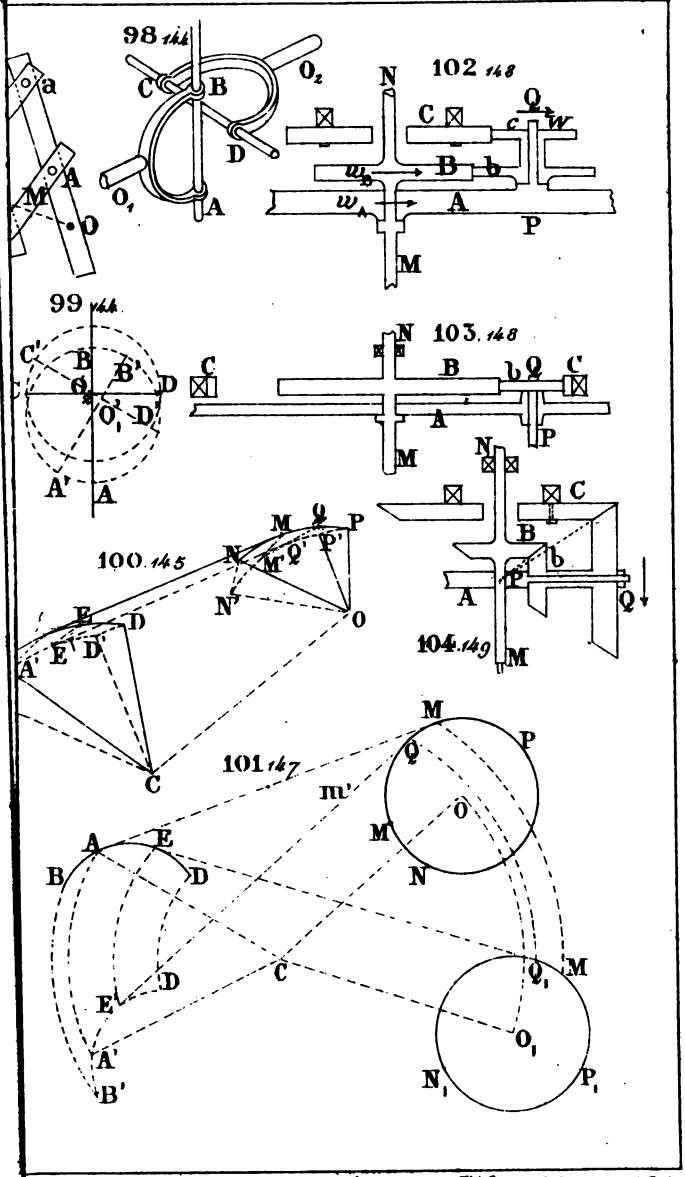
80 129



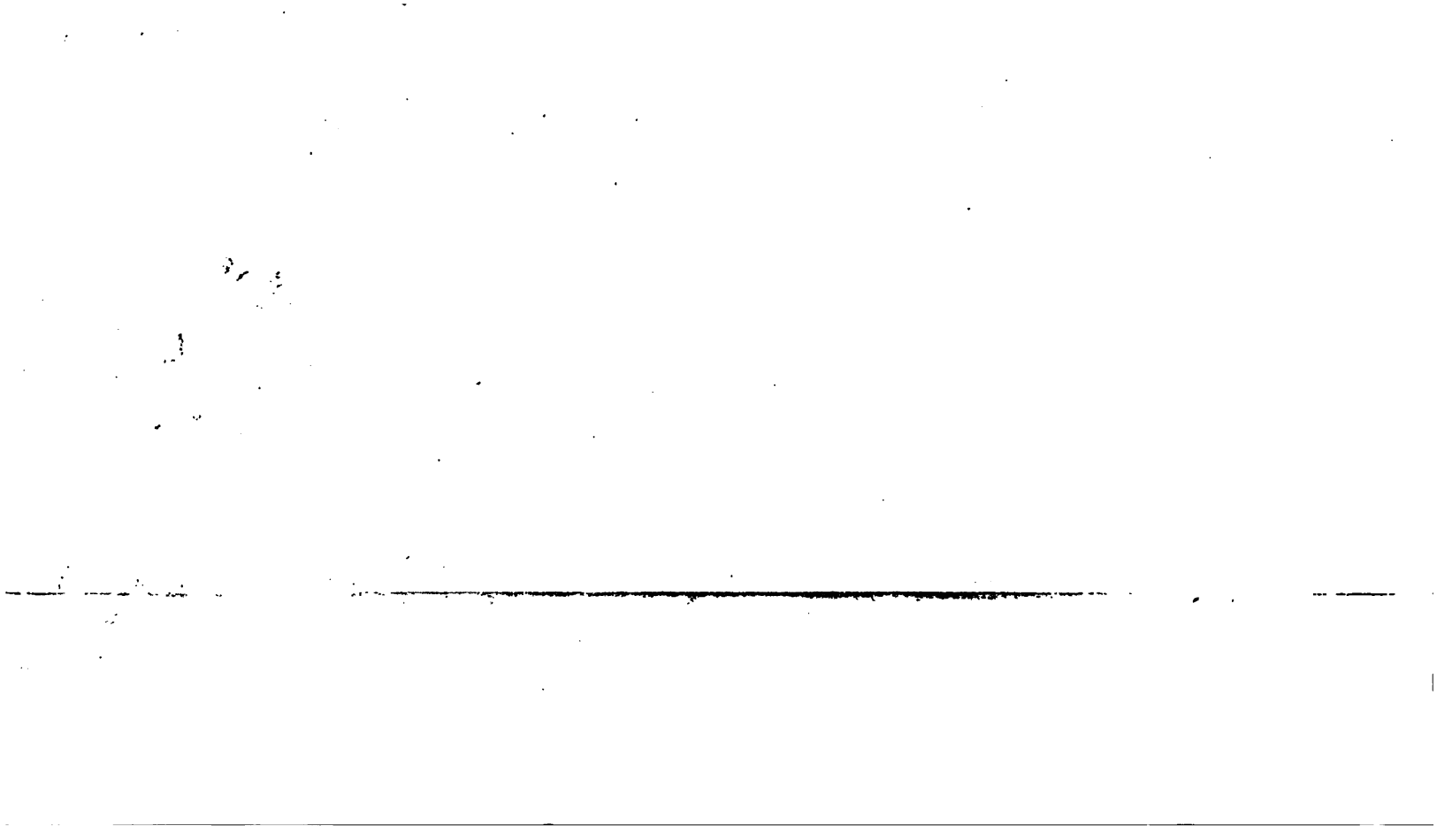
83. 130

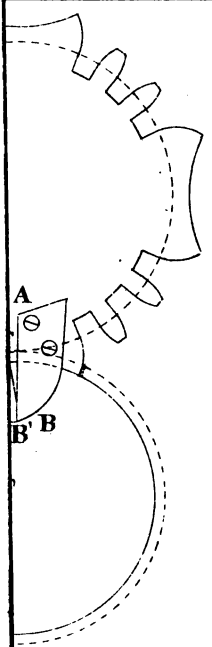


Autog. Brouse et Thiffry, r. de Dunkerque, 43, Paris.

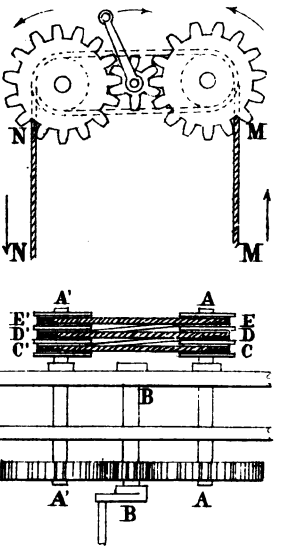


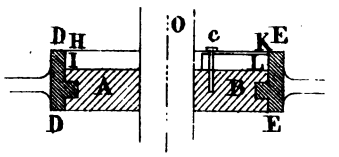
Autog. Broisé et Thiéffry rue de Dunkerque, 48. Paris.

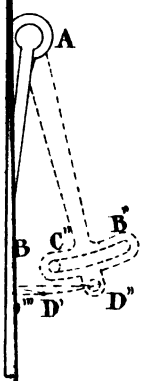




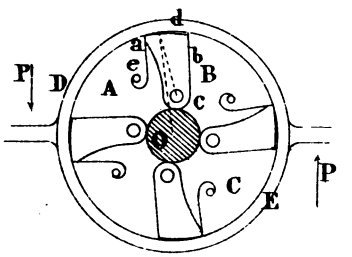
119. *182*



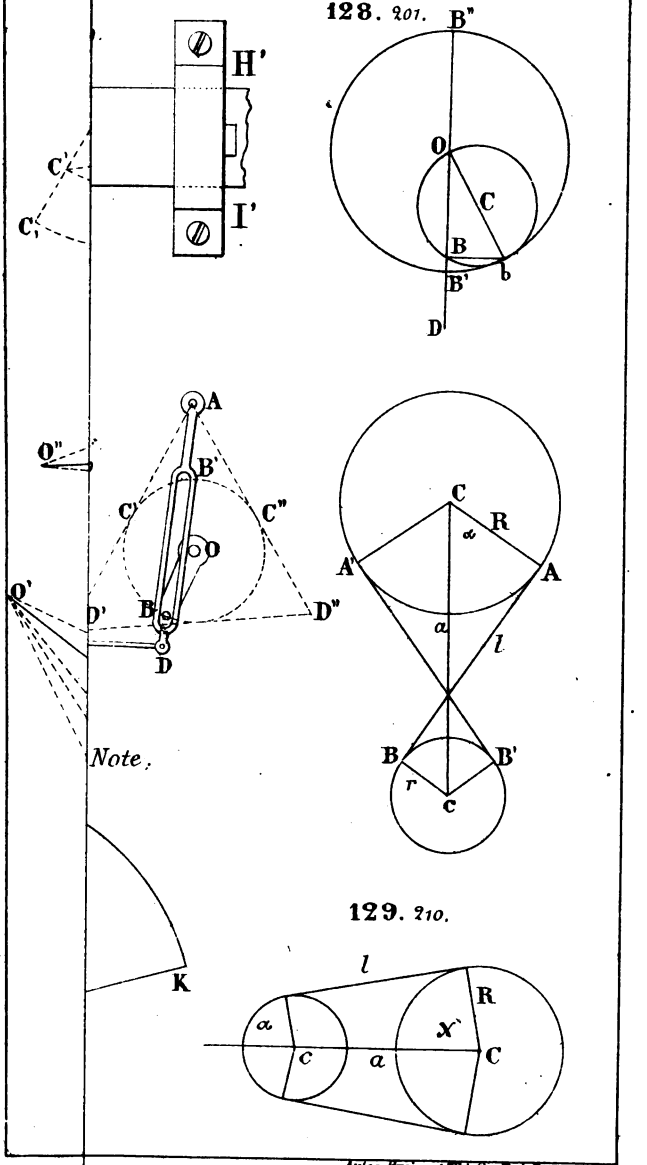




123. *194*



Autog. Broise et Thiefry, Rue de Dunkerque, 43. Paris



Autog. Braise et Thieffry, R. de Dunkerque, 63, Paris.

Transformations de mouvement. 1re Classe.

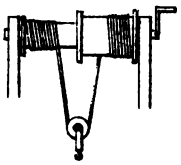
Liaison de deux mouvements circulaires progressifs, avec changement de sens simultané.

Imp. Bruise et Thiefry, r. de Dunkerque, 43, Paris.

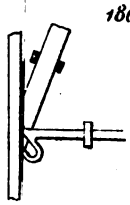
Pl. X.

Transformations de mouvement. **2e Classe**. Liaison de deux mouvements,

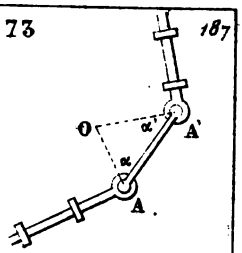
52 182



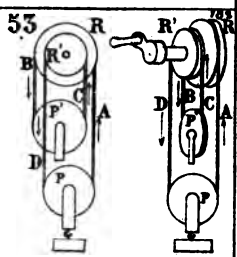
54 186



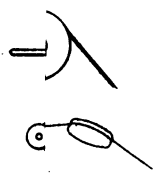
73 187



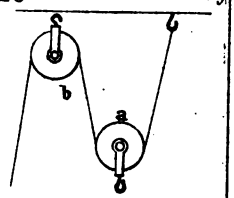
53 182



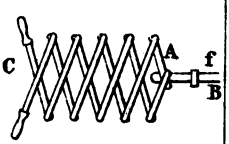
55 188



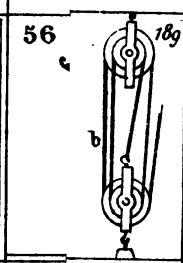
75 189



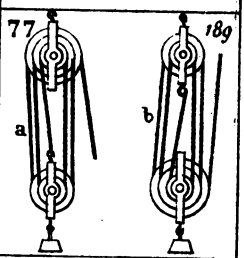
61 183



56 189

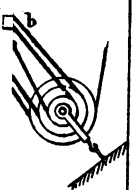


77 189

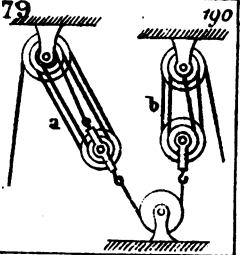


66 184

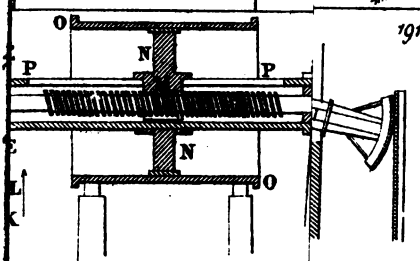
67 190



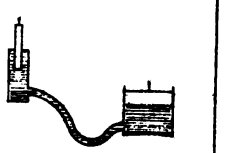
79 190



191



81 192



Broise et Thiefry, r. de Dunkerque, 43, Paris.

Transformations de mouvement. 4e. Classe.

Liaison de deux mouvements circulaires, l'un progressif l'autre alternatif.

Translation parallèle à l'axe de la rotation.	Translation parallèle au plan de la rotation.	
	Communication par bielle, engrenage ou corde.	*Communication immédiate.*
119 202	111 200	11 200 — i 199 — 198
118 201	117 200	116 200 — 109 199 — 105 198

Pl. XI.

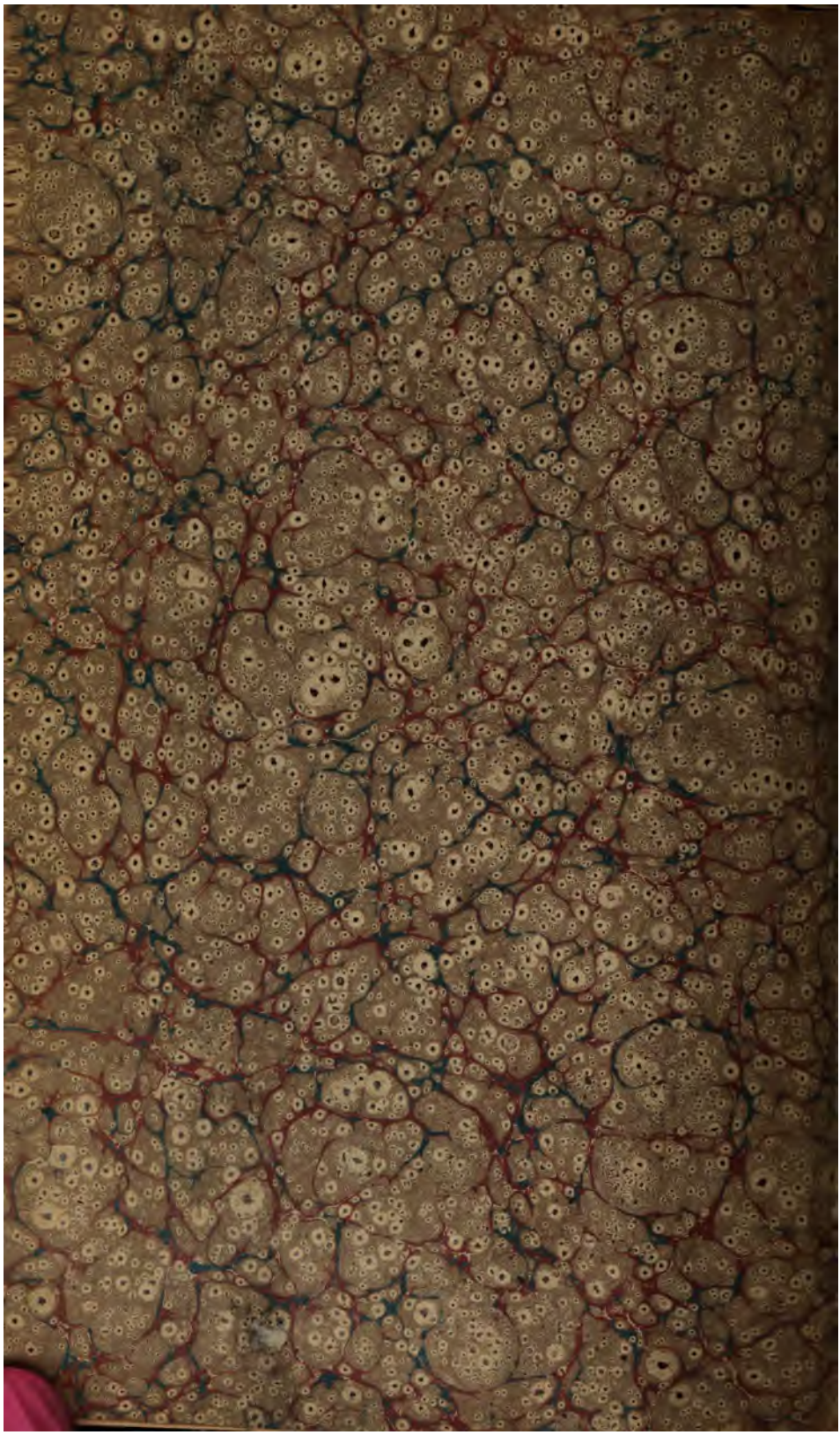
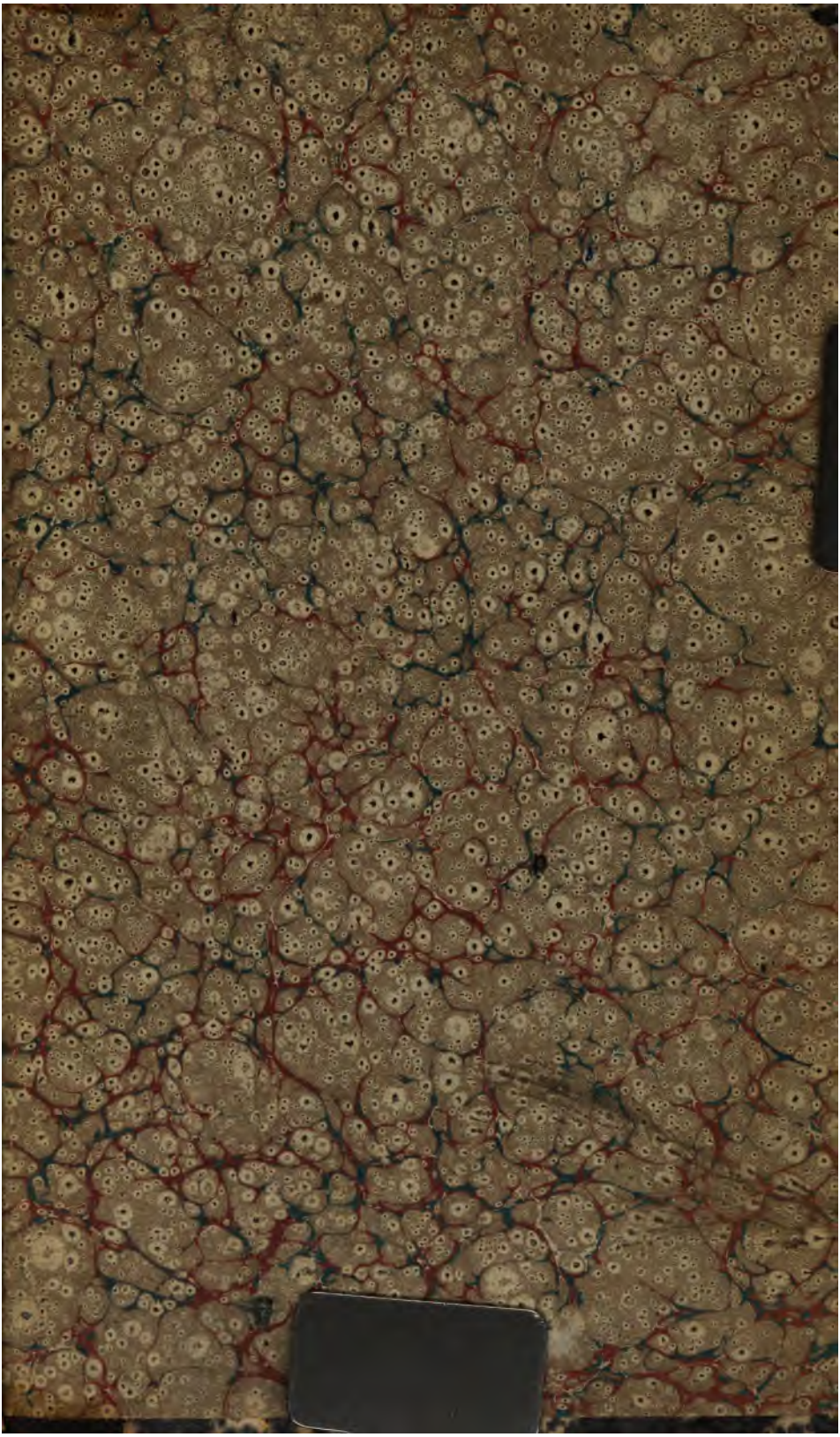
Organes servant à former, interrompre ou modifier les liaisons de mouvement dans les machines.

ENGINEERING LIBRARY

TJ 175 .B35 C.1
Traite de cinematique.
Stanford University Libraries
3 6105 030 410 208

TJ175
B35
TIMOSHENKO

DATE DUE

TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004